Correction Exercice 5 - Feuille 4.

1. Rappels sur l'équation du plan tangent à une surface donnée par des équations paramétriques

$$M_{uv} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

$M = (x,y,z)$ est dans le plan tangent si et seulement si les vecteurs $\underline{MM}_{uv} = (x - x(u,v), y - y(u,v), z - z(u,v))$

$M'_u = (\partial_u x(u,v), \partial_u y(u,v), \partial_u z(u,v))$ et $M'_v = (\partial_v x(u,v), \partial_v y(u,v), \partial_v z(u,v))$ sont lin^t dépendants, i.e. si le déterminant suivant est nul :

$$\det \begin{bmatrix} (x - x(u,v)) & \partial_u x(u,v) & \partial_v x(u,v) \\ (y - y(u,v)) & \partial_u y(u,v) & \partial_v y(u,v) \\ (z - z(u,v)) & \partial_u z(u,v) & \partial_v z(u,v) \end{bmatrix} = 0$$

En développant ce déterminant suivant la 1ère colonne on obtient l'équation du plan tangent

$$(x - x(u,v)) \det \begin{bmatrix} \partial_u y(u,v) & \partial_v y(u,v) \\ \partial_u z(u,v) & \partial_v z(u,v) \end{bmatrix} - (y - y(u,v)) \det \begin{bmatrix} \partial_u x(u,v) & \partial_v x(u,v) \\ \partial_u z(u,v) & \partial_v z(u,v) \end{bmatrix}$$

$$+ (z - z(u,v)) \det \begin{bmatrix} \partial_u x(u,v) & \partial_v x(u,v) \\ \partial_u y(u,v) & \partial_v z(u,v) \end{bmatrix} = 0$$

qu'on peut écrire sous la forme plus liée à des permutations circulaires des variables (x, y, z) en permutant les deux lignes du déterminant de $(y - y(u,v))$

$$x \det \begin{bmatrix} \partial_u y(u,v) & \partial_v y(u,v) \\ \partial_u z(u,v) & \partial_v z(u,v) \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \partial_u z(u,v) & \partial_v z(u,v) \\ \partial_u x(u,v) & \partial_v x(u,v) \end{bmatrix} + z \det \begin{bmatrix} \partial_u x(u,v) & \partial_v x(u,v) \\ \partial_u y(u,v) & \partial_v y(u,v) \end{bmatrix}$$

$$= x(u,v) \det \begin{bmatrix} \partial_u y(u,v) & \partial_v y(u,v) \\ \partial_u z(u,v) & \partial_v z(u,v) \end{bmatrix} + y(u,v) \det \begin{bmatrix} \partial_u z(u,v) & \partial_v z(u,v) \\ \partial_u x(u,v) & \partial_v x(u,v) \end{bmatrix} +$$

$$+ z(u,v) \det \begin{bmatrix} \partial_u x(u,v) & \partial_v x(u,v) \\ \partial_u y(u,v) & \partial_v y(u,v) \end{bmatrix}$$

On applique ces formules au cas

$$x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y(r,\theta) = r\sin\theta, \quad z(r,\theta) = f(r,\theta)$$

$$\det \begin{bmatrix} \partial_r y(r,\theta) & \partial_\theta y(r,\theta) \\ \partial_r z(r,\theta) & \partial_\theta z(r,\theta) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ \partial_r f & \partial_\theta f \end{bmatrix} = \sin\theta\, \partial_\theta f - r\cos\theta\, \partial_r f$$

$$\det \begin{bmatrix} \partial_r z(r,\theta) & \partial_\theta z(r,\theta) \\ \partial_r x(r,\theta) & \partial_\theta x(r,\theta) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \partial_r f & \partial_\theta f \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{bmatrix} = -\left(r\sin\theta\, \partial_r f + \cos\theta\, \partial_\theta f\right)$$

$$\det \begin{bmatrix} \partial_r x(r,\theta) & \partial_\theta x(r,\theta) \\ \partial_r y(r,\theta) & \partial_\theta y(r,\theta) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r$$

D'où l'équation du plan tangent

$(\sin\theta\,\partial_\theta f - r\cos\theta\,\partial_r f)\,x - (r\sin\theta\,\partial_r f + \cos\theta\,\partial_\theta f)\,y + rz$

$= (\sin\theta\,\partial_\theta f - r\cos\theta\,\partial_r f)\,r\cos\theta - (r\sin\theta\,\partial_r f + \cos\theta\,\partial_\theta f)\,r\sin\theta + rf$

$= -r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\partial_r f + rf = r(f - r\,\partial_r f)$

2. On fait z constant, $x = y = 0$ et θ constant pour obtenir $r(f - r\,\partial_r f) = rz$. En dehors de l'axe des z, on a donc $f - r\,\partial_r f = z$.

Dans cette équation θ et z sont fixés et r est variable. C'est donc une équation différentielle pour l'inconnue $r \longmapsto w_\theta(r) = f(r,\theta)$

$$w_\theta - r\,w'_\theta = z$$

Une solution particulière est donnée par $v(r) = z$.

Il reste donc à trouver la sol. gén. de l'éq. à 2nd membre $v_\theta - r\,v'_\theta = 0$. On a donc

$$\frac{v'_\theta}{v_\theta} = \frac{1}{r} \quad \text{d'où} \quad \ln\left|\frac{v_\theta(r)}{v(\theta)}\right| = \ln r$$

où $v(\theta)$ est une fonction arbitraire de θ ; d'où

$$v_\theta(r) = r\,v(\theta).$$

La sol. de l'équation $f - r\,\partial_r f = z$ est donc donnée par $f(r,\theta) = z + r\,v(\theta)$ où v est une fonction arbitraire de θ.