STPI-2T-Mathématiques - Correction Contrôle n°2 2012-13

Ex 1 1. $\partial_r g = \cos\theta\, \partial_x f + \sin\theta\, \partial_y f$; $\frac{1}{r}\partial_\theta g = -\sin\theta\, \partial_x f + \cos\theta\, \partial_y f$

2. $\partial_x f = \cos\theta\, \partial_r g - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta g$; $\partial_y f = \sin\theta\, \partial_r g + \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta g$

$x\partial_x f + y\partial_y f = r\,\partial_r g = \alpha f = \alpha g$; d'où

$r^{-\alpha}\partial_r g - \alpha r^{-\alpha-1} g = \partial_r(r^{-\alpha} g) = 0$

3. $r^{-\alpha} g(r,\theta) = v(\theta)$; v est arbitraire de classe C^1 périodique de période 2π ; d'où $g(r,\theta) = r^\alpha v(\theta)$

4. $f(tx, ty) = \rho^\alpha v(\varphi) = t^\alpha r^\alpha v(\theta) = t^\alpha f(x,y)$.

Ex 2. 1. $\partial_x f = x^3 - (x-y)$; $\partial_y f = y^3 - (y-x)$

D'où $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$; si $(x,y) \neq (0,0)$

$x+y=0$; cette équation est aussi vérifiée par $(0,0)$

2. $x^3 - 2x = x(x^2-2)$; pts critiques $\{(\sqrt{2},-\sqrt{2}), (0,0), (-\sqrt{2},\sqrt{2})\}$

3. $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2-1 & 1 \\ 1 & 3y^2-1 \end{bmatrix}$; $Hf(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = Hf(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = A$

avec $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; $\det(A - \lambda I) = (6-\lambda)(4-\lambda)$;

$(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ sont des pts de minimums locaux

4. $B = Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\det(B - \lambda I) = \lambda(\lambda+2)$

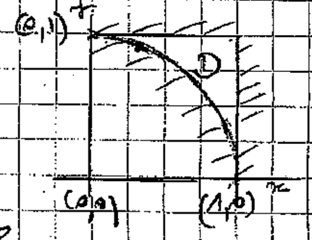
Une des val propres est nulle et l'autre < 0, on ne peut pas conclure.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$			0	$+$			
$\varphi(x)$		↘			$\varphi(0)=f(0,0)$	↗			
$\psi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\psi(x)$		↘		↗	$\psi(0)=f(0,0)$	↘		↗	

φ admet un minimum au pt 0 ; f passe par un minimum sur la droite $x-y=0$; ψ admet un maximum au pt 0

f admet un pt selle au pt $(0,0)$. 5. $4f(x,y) + 8 \geq 0$; $\pm(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ min global.

Ex 3 1. Aire $D = 1 - \pi/4$



2. $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; 0<x<1, 0<y<1, x^2+y^2<1\}$

$I_1 = \int_C xy\,dx\,dy + I_2 = 1/4$

$\int_C xy\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{\pi/2} r^3 \cos\theta\sin\theta\, d\theta\, dr = 1/8$

$I_2 = 1/4 - 1/8 = 1/8$

Ex 4 1. $x'(t) = 2 + 2\cos 2t - 4\cos t$; $y'(t) = 2\sin 2t - 4\sin t$

$(x', y') = 4(1-\cos t)(-\cos t, \sin t)$; $\|\underline{r}'(t)\| = 4(1-\cos t)$;

$l = \int_0^{\pi} 4(1-\cos t)\,dt = 4\pi$

2. $\underline{T}(t) = (-\cos t, \sin t)$; $\underline{T}'(t) = (\sin t, \cos t)$; $\|\underline{T}'(t)\| = 1$

$\underline{N}(t) = \underline{T}'(t)/\|\underline{T}'(t)\| = (\sin t, \cos t)$

3. $\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t) = 4^2(1-\cos t)\sin t\, \underline{T}(t)\times\underline{T}(t) + 4^2(1-\cos t)^2\, \underline{T}(t)\times\underline{T}'(t)$

d'où $K(t) = 1/4(1-\cos t)$.