IC2 – Mathématiques Correction CC2 2011-12

Exercice 1 1. h est définie sur D car $x > 0$; $\partial_x h(x,y) = g'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$

$\partial_y h(x,y) = g'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$; h est de classe C^1 sur D car $\partial_x h$ et $\partial_y h$ existent et h, $\partial_x h$, $\partial_y h$ sont continues sur D

2. $\{x = u,\ y = uv\}$ d'où puisque $x > 0$, $\{u = x,\ v = y/x\}$

Φ est donc bijective de D sur D et $\Phi^{-1}(x,y) = (u = x,\ v = y/x)$

Φ et Φ^{-1} sont de classe C^∞ sur D car leurs composantes sont de classe C^∞

3. $f(x,y) = s(u,v)$; $\partial_x f(x,y) = \partial_u s(u,v)\,\partial_x u + \partial_v s(u,v)\,\partial_x v =$

$\partial_u s(u,v) - \frac{y}{x^2}\partial_v s(u,v) = \partial_u s(u,v) - \frac{v}{u}\partial_v s(u,v)$

$\partial_y f(x,y) = \partial_u s(u,v)\,\partial_y u + \partial_v s(u,v)\,\partial_y v = \partial_v s(u,v)\frac{1}{x} = \frac{1}{u}\partial_v s(u,v)$

$x\,\partial_x f(x,y) + y\,\partial_y f(x,y) = u\left(\partial_u s(u,v) - \frac{v}{u}\partial_v s(u,v)\right) + uv\left(\frac{1}{u}\partial_v s(u,v)\right) =$

$u\,\partial_u s(u,v) = 0$; comme $u > 0$, $\partial_u s(u,v) = 0$.

4. $\partial_u s(u,v) = 0$ entraîne $s(u,v) = g(v)$ avec g de classe C^1

Les seules solutions sont celles trouvées à la question 1.

Exercice 2 1. Changement de variable : $x = a + r\cos\theta$, $y = b + r\sin\theta$

avec $r \geq 0$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$, d'où $\int_{\Omega_{R,a,b}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^R\int_0^{2\pi}\Big((a+r\cos\theta)^2$

$+ (b+r\sin\theta)^2\Big)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^R\int_0^{2\pi}(a^2+b^2+r^2+2ar\cos\theta+2br\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

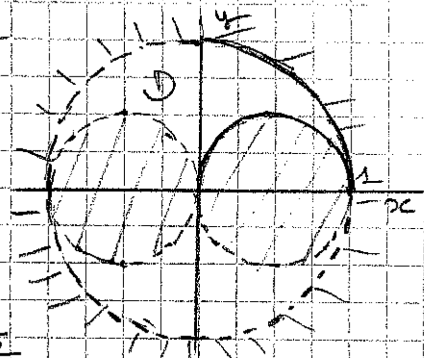
Comme $\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$, $\int_{\Omega_{R,a,b}}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi R^4}{2} + (a^2+b^2)\pi R^2$

2. $x^2+y^2-x = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0$; équation du cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

3. $(x,y) \in D$ ssi $|x| \leq x^2+y^2 \leq 1$, ssi $|-x| \leq (-x)^2+y^2 \leq 1$

ssi $|x| \leq x^2+(-y)^2 \leq 1$; D est sym. / à axe des x et des y.

Il suffit donc de représenter $D^+ = \{(x,y) \in D ;\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ et de prolonger par symétrie



Intérieur du cercle de centre O et de rayon 1

Extérieur des cercles de centre $\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

Aire $D = \pi - 2\pi\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$

4. $\int_D (1+x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{2} + \int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy =$

$\frac{\pi}{2} + \int_{\Omega_{1,0,0}} (x^2+y^2)\,dx\,dy - 2\int_{\Omega_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \pi - \frac{3\pi}{16} = \frac{13\pi}{16}$

Exercice 3

1. $\partial_x g(x,y) = y = 0$, $\partial_y g(x,y) = e^y + x = 0$.

Un seul point critique $(x = -1,\ y = 0)$

2. $\partial^2_x g(x,y) = 0$, $\partial^2_{xy} g(x,y) = 1$

$\partial^2_y g(x,y) = e^y$

Hessienne au point critique : $Hg(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

1ère méthode : $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$; val propres de sign distincts : $(-1,0)$ n'est pas extremum

2ème méthode $\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$

Valeurs propres $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

même conclusion

Exercice 4

1 $x'(\theta) = -2\sin\theta - 2\sin 2\theta = -4\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$y'(\theta) = 2\cos\theta - 2\cos 2\theta \quad 4\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$x'^2(\theta) + y'^2(\theta) = 16\sin^2\frac{3\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 16\sin^2\frac{3\theta}{2}$

2 Elément de longueur $ds = \sqrt{16\sin^2\frac{3\theta}{2}}\, d\theta$; $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$

$0 \leq \frac{3\theta}{2} \leq \pi$; $0 \leq \sin\frac{3\theta}{2} \leq 1$, $ds = 4\sin\frac{3\theta}{2}\, d\theta$

$l = \int_0^{2\pi/3} 4\sin\frac{3\theta}{2}\, d\theta = \left[-\frac{8}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right]_0^{2\pi/3} = \frac{16}{3}$

3. $\underline{T}(\theta) = \Pi'_\theta / \|\Pi'_\theta\| = \left(-\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$

$\underline{T}'(\theta) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$;

$\underline{N}(\theta) = \underline{T}'(\theta) / \|\underline{T}'(\theta)\| = \left(\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$

4. 1ère méthode

$\underline{T}'(s) = K(s)\underline{N}(s)$; $\underline{T}'(s) = \underline{T}'(\theta)\, \partial_s\theta =$

$= \underline{T}'(\theta)\,(1/\partial_\theta s)$

$ds = 4\sin\frac{3\theta}{2}\, d\theta$: $\partial_\theta s = 4\sin\frac{3\theta}{2}$

$K(\theta) = \|\underline{T}'(s)\| = \frac{1}{4\sin\frac{3\theta}{2}}\|\underline{T}'(\theta)\| = \frac{1}{8\sin\frac{3\theta}{2}}$

2ème méthode

$K(\theta) = \frac{|\Pi''_\theta \times \Pi'_\theta|}{\|\Pi'_\theta\|^3} = \frac{\left|\left(\left(4\sin\frac{3\theta}{2}\right)'\underline{T}(\theta) + 4\sin\frac{3\theta}{2}\underline{T}'(\theta)\right) \times 4\sin\frac{3\theta}{2}\underline{T}(\theta)\right|}{4^3\sin^3\frac{3\theta}{2}}$

$K(\theta) = \frac{4^2\sin^2\frac{3\theta}{2}\,|\underline{T}'(\theta) \times \underline{T}(\theta)|}{4^3\sin^3\frac{3\theta}{2}} = \frac{4^2\sin^2\frac{3\theta}{2}\,\frac{1}{2}}{4^3\sin^3\frac{3\theta}{2}}$

$= 1 / 8\sin\frac{3\theta}{2}$

5. Rayon de courbure $R_\theta = 8\sin\frac{3\theta}{2}$

Centre de courbure $C_\theta = \Pi_\theta + R_\theta\underline{N}(\theta)$

$C_\theta = (2\cos\theta + \cos 2\theta, \sin\theta - \sin 2\theta) + \left(8\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}, 8\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$C_\theta = (2\cos\theta + \cos 2\theta + 4\cos\theta - 4\cos 2\theta, \sin\theta - \sin 2\theta + 4\sin\theta + 4\sin 2\theta)$

$C_\theta = (6\cos\theta - 3\cos 2\theta, 6\sin\theta + 3\sin 2\theta)$

$C_\theta = 3(2\cos\theta - \cos 2\theta, 2\sin\theta + \sin 2\theta)$