Correction CC1 Mathématiques

IC2, 2012-2013

$\boxed{\text{Exc. 1}}$ $q_a(v) = x^2+y^2+z^2+2a(xy+xz+yz)$, $v=(x,y,z)$

1) Par dédoublement, $f_a(v,v') = xx'+yy'+zz'+a(xy'+x'y+xz'+x'z+yz'+y'z)$

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

2) $\boxed{a=1} \Rightarrow q_1(v) = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz = (x+y+z)^2 \geq 0,\ \forall v \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow q_1$ est positive.

Par contre, $q_1(\underbrace{(1,-1,0)}_{\neq 0_{\mathbb{R}^3}}) = 0 \Rightarrow q_1$ n'est pas définie

$\Rightarrow f_1$ n'est pas un produit scalaire.

3) $$P_a(\lambda) = \det(A_a - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ a & 1-\lambda & a \\ a & a & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{(L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3)}{=} \begin{vmatrix} 1+2a-\lambda & 1+2a-\lambda & 1+2a-\lambda \\ a & 1-\lambda & a \\ a & a & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+2a-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1-\lambda & a \\ a & a & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\begin{cases}C_2 \leftarrow C_2-C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3-C_1\end{cases}}{=} (1+2a-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1-a-\lambda & 0 \\ a & 0 & 1-a-\lambda \end{vmatrix} = (1+2a-\lambda)(1-a-\lambda)^2.$$

4) Les valeurs propres de A_a sont $1+2a$, $1-a$, $1-a$.

$(\mathbb{R}^3, f_a)$ est euclidien si et seulement si f_a est un produit scalaire

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2a > 0 \\ 1-a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a \in \left]-\tfrac{1}{2}, 1\right[}$$

5) On trouve E_{1+2a} et E_{1-a} (comme $a \neq 0$, $1+2a \neq 1-a$)

$E_{1+2a} = \{v \in \mathbb{R}^3 : A_a v = (1+2a)v\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : (A_a - (1+2a)I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

On doit résoudre le système : $\begin{pmatrix} -2a & a & a \\ a & -2a & a \\ a & a & -2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2ax+ay+az=0 \\ ax-2ay+az=0 \\ ax+ay-2az=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ 3x-3y=0 \ (L_2-L_1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \underline{x=y=z}$

$\Rightarrow \underline{E_{1+2a} = \mathrm{Vect}((1,1,1))}$

Soit $v_1 = \dfrac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$

$$E_{1-a} = \{ v \in \mathbb{R}^3 : \left(A_a - (1-a) I_3\right)^2 v = 0_{\mathbb{R}^3} \} = \{ v \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \}$$
$$= \{ v = (x, y, z) : x + y + z = 0 \}$$
$$= \{ (x, y, -x-y) : x, y \in \mathbb{R} \} = \underline{\mathrm{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}}$$

Soit $u_2 = (1, 0, -1)$, $u_3 = (0, 1, -1)$

$\langle u_2, u_3 \rangle = 1 \neq 0 \to u_2$ et u_3 ne sont pas orthogonaux.

On applique le procédé de Gram-Schmidt :

$$v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, -1)}.$$

$\tilde{v}_3 = u_3 - \alpha v_2$, avec α t.q. $\langle \tilde{v}_3, v_2 \rangle = 0$.

$\hookrightarrow \langle \tilde{v}_3, v_2 \rangle = \langle u_3, v_2 \rangle - \alpha \underbrace{\|v_2\|^2}_{1} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \alpha = \langle u_3, v_2 \rangle$

$$\Rightarrow \tilde{v}_3 = u_3 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 = (0, 1, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, -1) =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right).$$

On pose $v_3 = \dfrac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = \underline{\dfrac{\sqrt{6}}{6}(-1, 2, -1)}.$

On vérifie si la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ est directe $\Leftrightarrow \det(P) > 0$

la matrice de passage

$$\det(P) = \det[v_1, v_2, v_3] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$(L_1 \leftarrow L_1 + L_3)$

$$= \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \times (-1) \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{6} \times 6 = 1 > 0$$

$\hookrightarrow$ la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base o.n. directe formée de vecteurs propres de A_a.

6) La matrice de g_a dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A_a' = P^T A_a P = P^{-1} A_a P = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}.$$

P orthogonale (matrice de passage entre deux bases orthonormées)

$$\to g_a(v) = (x' \; y' \; z') A_a' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (1+2a)(x')^2 + (1-a)(y')^2 + (1-a)(z')^2.$$

7) $\|v_1\|_a = \sqrt{f_a(v_1, v_1)} = \sqrt{1+2a}$

$\|v_2\|_a = \sqrt{f_a(v_2, v_2)} = \sqrt{1-a} = \|v_3\|_a$.

8) La base $\mathcal{B}$ est orthogonale pour f_a, car la matrice A'_a de f_a dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale $\left(\begin{array}{l} f_a(v_1, v_3) = 0 \\ f_a(v_1, v_2) = 0 \\ f_a(v_2, v_3) = 0 \end{array}\right)$

mais elle n'est pas orthonormée, car $\|v_1\|_a \neq 1$.

9) On pose $w_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|_a} = \dfrac{1}{\sqrt{3(1+2a)}}(1,1,1)$.

$w_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|_a} = \dfrac{1}{\sqrt{2(1-a)}}(1,0,-1)$.

$w_3 = \dfrac{v_3}{\|v_3\|_a} = \dfrac{1}{\sqrt{6(1-a)}}(-1,2,-1)$.

↳ la base $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ est orthonormée pour le p.s. f_a.

$\boxed{\text{Exc. 2}}$

1) $\langle u_1, u_2\rangle = 0$, $\langle u_1, u_3\rangle = 0$, $\langle u_2, u_3\rangle = 0$

↳ $\mathcal{U}$ est orthogonale.

On sait que si une fam. orthogonale ne contient pas $0_{\mathbb{R}^3}$, alors la fam. est libre.

↳ $\left.\begin{array}{l}\mathcal{U} \text{ est libre} \\ \operatorname{card}(\mathcal{U}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{U}$ est une base.

2) $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{2}(-2,0,0)$; $v_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(0,-1,2)$

$v_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)$

$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

3) $F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$

comme $\left.\begin{array}{l}\langle u_3, u_1\rangle = 0 \\ \langle u_3, u_2\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_3 \in F^{\perp} \\ \dim(F^{\perp}) = 3 - \dim(F) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{F^{\perp} = \operatorname{Vect}(u_3)}$

4) On doit calculer $p_{F^\perp}(e_1)$, $p_{F^\perp}(e_2)$, $p_{F^\perp}(e_3)$.

• On remarque que $e_1 = -\frac{1}{2} u_1 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2) = F$

$$\Rightarrow \quad p_{F^\perp}(e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

• On a $\begin{cases} u_1 = -2e_1 \\ u_2 = 2e_2 + e_3 \\ u_3 = -e_2 + 2e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = -\frac{1}{2} u_1 \\ u_2 = 2e_2 + e_3 \\ u_2 + 2u_3 = 5e_3 & (2L_3 + L_2) \end{cases}$

$$\Rightarrow e_3 = \underbrace{\frac{1}{5} u_2}_{\in F} + \underbrace{\frac{2}{5} u_3}_{\in F^\perp} \Rightarrow p_{F^\perp}(e_3) = \frac{2}{5} u_3 = \left(0, -\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$e_2 = \frac{1}{2} u_2 - \frac{1}{2} e_3$$

$$\Rightarrow \underline{p_{F^\perp}(e_2)} = \frac{1}{2} \underbrace{p_{F^\perp}(u_2)}_{\substack{0 \\ \text{car } u_2 \in F}} - \frac{1}{2} p_{F^\perp}(e_3) = \underline{\left(0, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)}$$

$$\hookrightarrow \mathrm{Mat}(p_{F^\perp}, \mathcal{E}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} p_{F^\perp}(e_1) & p_{F^\perp}(e_2) & p_{F^\perp}(e_3) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

• <u>Une autre méthode :</u>

$\forall v$, $p_{F^\perp}(v) \in F^\perp = \mathrm{Vect}(u_3) \Rightarrow p_{F^\perp}(v) = \alpha u_3$.

$v - p_{F^\perp}(v) \in F \Rightarrow v - \alpha u_3 \in F \Rightarrow \langle v - \alpha u_3, u_3 \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle v, u_3 \rangle - \alpha \|u_3\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\langle v, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2}$.

$$\Rightarrow p_{F^\perp}(v) = \frac{\langle v, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} \cdot u_3.$$

$\hookrightarrow p_{F^\perp}(e_1) = \dfrac{\langle e_1, u_3 \rangle}{5} u_3 = 0$

$p_{F^\perp}(e_2) = \dfrac{\langle e_2, u_3 \rangle}{5} u_3 = -\dfrac{1}{5} u_3 = \left(0, \dfrac{1}{5}, -\dfrac{2}{5}\right)$

$p_{F^\perp}(e_3) = \dfrac{\langle e_3, u_3 \rangle}{5} u_3 = \dfrac{2}{5} u_3 = \left(0, -\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.