2ème année IC

Correction CC1 Mathématiques

Exercice 1

1. $q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2yz$

$= [x\ y\ z] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$; q est donc une forme quadratique

de matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ dans la base canonique.

2. $q(x,y,z) = 2x^2 + (y+z)^2 + 2z^2 \geq 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

q est donc positive ; $q(x,y,z) = 0$ donne $x = z = 0$

et $(y+z) = 0$ d'où $y = 0$; q est définie et donc

f est un produit scalaire de E.

3. $\|v\|_f = \sqrt{2x^2 + (y+z)^2 + 2z^2}$

4. $f(e_2, e_3) = 1$ et donc B n'est pas orthogonale

pour le produit scalaire f

5. $v \in F^\perp$ ssi $f(v, e_1) = 2x = 0$; d'où $x = 0$

$F^\perp = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$

Base orthogonale

$\tilde{v}_2 = e_2$, $\tilde{v}_3 = e_3 + \alpha e_2$

$f(\tilde{v}_3, e_2) = f(e_3, e_2) + \alpha f(e_2, e_2) = 1 + \alpha$; $\alpha = -1$

$\rightarrow \tilde{v}_3 = e_3 - e_2$

$v_2 = \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|} \tilde{v}_2 = e_2$; $v_3 = \frac{1}{\|e_3 - e_2\|_f}(e_3 - e_2)$

$\|e_3 - e_2\|_f = \sqrt{f(e_3 - e_2, e_3 - e_2)} = \sqrt{3 - 2 + 1} = \sqrt{2}$

ou $\|e_3 - e_2\|_f^2 = [0\ {-1}\ 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [0\ {-1}\ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$

donc $v_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_3 - e_2) = (0, -1, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

7. $\{e_1, v_2, v_3\}$ est orthogonale ; $\|e_1\|_f = \sqrt{2}$

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-3e_2 + e_3)$

est une B.O.N pour le produit scalaire f

Exercice 2

1. Par dédoublement de variables, on a si $u = (x,y)$, $v = (x', y')$

$f(u,v) = [x\ y] \begin{bmatrix} 1-a & -a \\ -a & 1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ d'où la matrice de f.

2. $a = \frac{1}{2}$; $q(v) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - xy = \frac{1}{2}(x - y)^2$

La forme quadratique est positive mais non définie

$q(x,x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

3. $\det \begin{bmatrix} 1-a-\lambda & -a \\ -a & 1-a-\lambda \end{bmatrix} = (1-a-\lambda)^2 - a^2 = (1-a-\lambda-a)(1-a-\lambda+a)$

$= (1-2a-\lambda)(1-\lambda)$

$\lambda = 1$ et $\lambda = 1 - 2a$

4. $1 - 2a > 0$ $a < \frac{1}{2}$

4 f est un produit scalaire car la forme quadratique associée à la forme bilinéaire qui le définit est définie positive : $a < \frac{1}{2}$

(a) Vecteur propre associé à $\lambda = 1$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

$x + y = 0$ i.e $x = -y$, $y \in \mathbb{R}$

$E_1 = \text{Vect}(-1, 1)$

Vecteur propre associé à $\lambda = 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} -x + y = 0 \\ x = y \end{matrix}$$

$E_2 = \text{Vect}(1, 1)$

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$

(b)

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) $q(au_1 + bu_2) = [a\ b]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2 + 2b^2$