

Contrôle de Mathématiques

Durée de l'examen : 1h30

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice 1 (5 points) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vérifiant

$$x\partial_x f(x, y) + y\partial_y f(x, y) = \alpha f(x, y), \quad \forall (x, y) \neq (0, 0) \text{ dans } \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

où α est un nombre réel fixé. Pour résoudre cette équation, on passe en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ et on pose $g(r, \theta) = f(x, y)$.

1. Calculer $\partial_r g(r, \theta)$ et $\frac{1}{r}\partial_\theta g(r, \theta)$ à l'aide de $\partial_x f(x, y)$ et $\partial_y f(x, y)$.
2. Donner l'équation différentielle vérifiée par l'application partielle $r \rightarrow g(r, \theta)$ et montrer qu'elle se met sous la forme $\partial_r(r^{-\alpha}g(r, \theta)) = r^{-\alpha}\partial_r g(r, \theta) - \alpha r^{-\alpha-1}g(r, \theta) = 0$.
3. Résoudre l'équation précédente en exprimant sa solution à l'aide d'une fonction arbitraire $\theta \rightarrow v(\theta)$ de classe \mathcal{C}^1 de θ .
4. En déduire que toute solution de l'équation (1) vérifie la relation

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y), \quad \forall t > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

(On pourra remarquer –faire un dessin– que les coordonnées polaires ρ et φ de (tx, ty) s'expriment à l'aide de celles r et θ de (x, y) par $\rho = tr$ et $\varphi = \theta$.)

Exercice 2 (6 points) Le but de l'exercice est de déterminer les points d'extremum de la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4) - \frac{1}{2}(x - y)^2$$

1. Montrer que tout point critique (x, y) de f vérifie $x + y = 0$. (On pourra utiliser les deux propriétés admises suivantes $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ et $x^2 - xy + y^2 > 0$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 .)
2. En déduire que les points critiques de f sont donnés par

$$\left\{ \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2} \right), \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2} \right), (0, 0) \right\}.$$

3. Montrer que $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des extrema locaux et préciser à chaque fois s'il s'agit d'un point de minimum ou maximum local. Donnez la valeur de la fonction en ces points.
4. Pourquoi ne peut-on pas conclure comme à la question ci-dessus pour le point $(0, 0)$? Donner le tableau des variations des fonctions $x \rightarrow \varphi(x) = f(x, x)$ et $x \rightarrow \psi(x) = f(x, -x)$. Conclusion?
5. Vérifier que $4f(x, y) + 8 = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x + y)^2$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La fonction f admet-elle des points de minimum ou maximum global?

Tourner S.V.P.

Exercice 3 (4 points) Soit D le domaine du plan défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$.

1. Dessiner le domaine D et calculer son aire.
2. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{[0,1]^2} xy \, dx dy, \quad I_2 = \int_D xy \, dx dy.$$

(On rappelle que $[0, 1]^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.)

Exercice 4 (5 points) On considère l'arc de courbe donnée par la paramétrisation suivante :

$$\begin{aligned}x(t) &= 2t + \sin(2t) - 4 \sin t, \\y(t) &= 3 + \cos(2t) - 4 \cos t,\end{aligned}$$

avec $0 < t < \pi$.

1. Calculer la longueur ℓ de cet arc de courbe. (On pourra utiliser les relations trigonométriques suivantes $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ et $1 + \cos(2a) = 2 \cos^2 a$.)
2. Déterminer le vecteur tangent unitaire $T(t)$, ainsi que le vecteur normal principal $N(t)$ en tout point M_t de cet arc de courbe.
3. Calculer la courbure $\kappa(t)$ en tout point M_t de cet arc de courbe.