I.N.S.A. TOULOUSE
Département STPI, 2ème année IC

Mercredi 2 novembre 2011

Contrôle de cours de Mathématiques

Durée 1h15.

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Le barême est indicatif.

Exercice 1. (10 pts.)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère l'application définie de E dans $\mathbb{R}$ par

$$q(x, y, z) = 2x^2 + (y + z)^2 + 2z^2.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur E. Donner l'expression de la forme bilinéaire f associée et de sa matrice dans la base canonique $\mathcal{E}$.
2. Montrer que f définit un produit scalaire sur E.
3. On note $\|.\|_f$ la norme associée au produit scalaire f. Pour $v = (x, y, z) \in E$, donner l'expression de $\|v\|_f$.
4. La base canonique $\mathcal{E}$ est-elle orthogonale pour le produit scalaire f ? Justifier.
5. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1)$. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ de F pour le produit scalaire f.
6. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$ pour le produit scalaire f.
7. En déduire une base orthonormée de E pour le produit scalaire f.

Exercice 2. (10 pts.)

Soit $(\mathbb{R}^2, <.,.>)$ l'espace euclidien canonique et $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ sa base canonique. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$q(v) = (1 - a)(x^2 + y^2) - 2axy,\ \forall v \in \mathbb{R}^2,\ v = xe_1 + ye_2.$$

1. Écrire la forme bilinéaire f associée à q et donner sa matrice A dans la base canonique.
2. Pour $a = 1/2$, la forme quadratique q est-elle définie ? positive ? Justifier.
3. Déterminer, pour a quelconque, les valeurs propres de la matrice A.
4. Pour quelles valeurs de a la forme bilinéaire f est un produit scalaire ? Justifier.
5. On suppose dans la suite que $a = -1/2$.
   (a) Déterminer une base $\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A et orthonormée pour le produit scalaire canonique.
   (b) Donner la matrice de q dans la base $\mathcal{U}$.
   (c) Pour $v = au_1 + bu_2$, donner l'expression de $q(v)$ en fonction de a et b.