INSA de Toulouse
Département STPI – Deuxième Année - Préorientation IC
UF : Maths-Méca Année 2010–11

Contrôle n° 1

Exercice 1. (sur 7 points.)
On considère l'application q de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \; q(v) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$$

1. Montrer que q est une forme quadratique dont on donnera la forme polaire f et la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$
2. Trouver $\lambda > 0$ et μ, $\nu \in \mathbb{R}$ tels que
$$q(v) = \lambda x^2 + 3(y + \mu x)^2 + 4z^2 + (t + \nu x)^2$$
pour tout $v = \begin{bmatrix} x & y & z & t \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^4$.
3. Montrer que f définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$. (On pourra admettre la question 2 pour faire cette question.)
4. Sans faire aucun calcul, répondez en justifiant votre réponse aux questions suivantes
   (a) A peut-elle avoir une valeur propre avec une partie imaginaire non nulle ?
   (b) A peut-elle avoir une valeur propre nulle ?
   (c) A peut-elle avoir une valeur propre strictement négative ?

Exercice 2. (sur 13 points.)
1. Montrer que les deux vecteurs
$$u = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ et } v = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ \lambda \end{bmatrix}$$
sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel $u^\top v$ de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\lambda = -2$.
2. Déterminer le sous-espace orthogonal à $E = \mathrm{Vect}\,(u, v)$
$$E = \left\{p \in \mathbb{R}^3 \; ; \; p^\top q = 0, \; \forall q \in E\right\}$$
3. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ et $w \in E^\perp$ tels que
$$A = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} 6 & 3 & w_1 \\ -2 & 6 & w_2 \\ 3 & -2 & w_3 \end{bmatrix}$$
soit la matrice d'une rotation, où w_1, w_2, w_3 sont les composantes du vecteur w.
4. Déterminer un vecteur colinéaire à l'axe de cette rotation et l'angle de celle-ci autour de ce vecteur. (On donnera l'angle de la rotation à l'aide de l'arc cosinus $\arccos x_0$ d'un nombre x_0 qu'on déterminera.)