

Feuille de TD numéro 4

Exercice 1.

On veut étudier l'arc de la cycloïde paramétrée par:

$$x(t) = a(t - \sin(t)), \quad y(t) = a(1 - \cos(t)),$$

avec $t \in [0, 2\pi]$ et $a > 0$.

1. Calculer la longueur de cet arc de courbe.
2. En précisant les points t pour lesquels les quantités suivantes existent, déterminer:
 - (a) le vecteur tangent unitaire $\mathbf{T}(t)$;
 - (b) le vecteur normal unitaire $\mathbf{N}(t)$;
 - (c) la courbure $\kappa(t)$;
 - (d) les coordonnées du centre du cercle osculateur au point M_t .
3. Donner une paramétrisation par une abscisse curviligne s de cet arc de courbe.
4. Calculer $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ et $\kappa(s)$ et vérifier la relation de Frenet: $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$.

Exercice 2.

Soit s une abscisse curviligne sur un arc de courbe Γ du plan. On note par $\mathbf{T}(s)$ et $\mathbf{N}(s)$ le repère de Frenet au point M_s de Γ . On note $\theta(s)$ l'angle que fait $\mathbf{T}(s)$ avec l'axe Ox .

1. On suppose pour simplifier que $\theta'(s) \geq 0$. Montrer que $\kappa(s) = \theta'(s)$.
2. En déduire que si $\kappa(s) = 1/R > 0$, alors Γ est un arc de cercle.
3. Déduire de même que si $\kappa(s) = 0$, alors Γ est un segment de droite.

Exercice 3.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On considère la surface Γ d'équations paramétriques

$$x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y(r, \theta) = r \sin \theta, \quad z(r, \theta) = f(r, \theta).$$

1. Donner l'équation du plan tangent à Γ en un point $M(r, \theta)$.
2. Déterminer f de sorte que, le long d'une ligne $\theta = \theta_0$, le plan tangent coupe l'axe Oz en un point fixe.
3. On pose désormais $f(r, \theta) = \theta$. Quelle surface obtient-on? Quelle courbe C_0 obtient-on le long de $\{r = r_0\}$?
4. Calculer la courbure $\kappa(\theta)$ et la torsion $\tau(\theta)$ de la courbe C_0 en un point $M(r_0, \theta)$.

Exercice 4.

Calculer l'intégrale

$$\int_{\Gamma_{\circlearrowleft}} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$$

où Γ est le pourtour du triangle ABC avec $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(0,1)$, l'orientation $\Gamma_{\circlearrowleft}$ sur Γ étant celle dans le sens direct.

Exercice 5.

Pour $a, b > 0$ on considère le domaine

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x, y \geq 0 \right\}.$$

1. En utilisant un changement de variables, calculer

$$\int_{\Omega} (2x^3 - y) dx dy.$$

2. Vérifier le résultat à l'aide de la formule de Green-Riemann.

Exercice 6.

Calculer l'aire engendrée par l'arc de la parabole

$$0 \leq z \leq A, \quad x^2 = 2pz, \quad p > 0$$

tournant autour de l'axe Oz .