INSA de Toulouse, $2^{\text{ème}}$ année IC 2011-2012

Devoir maison de mathématiques

Exercice 1

1. Montrer par récurrence que

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\ dx = n!,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Montrer que l'application

$$\phi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx,\ \forall P,Q \in \mathbb{R}[X]$$

   définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, l'espace de polynômes à coefficients réels.

3. On considère dans la suite $\mathbb{R}_2[X]$, l'espace des polinômes à coefficients réels de degré ≤ 2. Justifier le fait que la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_2[X]$ reste un produit scalaire.

4. Ecrire la matrice A de ϕ dans la base canonique $\mathcal{E} = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

5. En déduire l'expression, dans la base canonique, de ϕ et de la forme quadratique q associée.

6. On considère la famille $\mathcal{B} = \{1 - X^2, X, X^2\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner la matrice de passage P entre la base canonique $\mathcal{E}$ et la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer la matrice A' de ϕ dans cette base.
   (c) Quelle relation il y a entre les matrices A, A' et P? Vérifier cette relation.

7. Les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ sont-elles orthogonales pour le produit scalaire ϕ? Sont-elles orthonormées?

8. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(0) = 0\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer une base de F.
   (b) Déterminer l'espace vectoriel orthogonal à F relativement au produit scalaire ϕ, défini par

$$F^\perp = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : \phi(P,Q) = 0,\ \forall Q \in F\}.$$

Exercice 2
On considère l'application $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(v) = 4(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + xz + yz), \ \forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et déterminer la forme polaire f associée à q.

2. Déterminer la matrice A de la forme bilinéaire f dans la base canonique $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1,2,3}$ de $\mathbb{R}^3$. Trouver ensuite les valeurs propres de A.

3. En déduire que f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

4. Retrouver directement le résultat précédent en décomposant la forme quadratique q en une somme de carrés.

5. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire f.

   (a) La base base canonique $\mathcal{E}$ est-elle orthogonale pour le produit scalaire f?

   (b) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, construire à partir de la base $\mathcal{E}$ une base orthonormée pour le produit scalaire f.

   (c) Donner la matrice de passage P entre la nouvelle base construite et la base canonique $\mathcal{E}$. La matrice P est-elle orthogonale? Justifier.