INSA de Toulouse
Département STPI – Deuxième Année - Préorientation IC
UF : Maths-Méca Année 2010–11

Corrigé contrôle n° 2 de mathématiques

Exercice 1.

1. (a) $h'(v) = (2\partial_x f + 3\partial_y f)(u+2v, u+3v) = 4h(v)$.
   (b) $h(v) = h(0)e^{4v}$, $h(0) = f(u,u) = u$, $h(v) = ue^{4v}$

2. $x = u + 2v,\ y = u + 3v \to v = y - x,\ u = x - 2v = 3x - 2y$
   $f(x,y) = (3x - 2y)\, e^{4(y-x)}$

Exercice 2.

1. (a) Points critiques.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x f(x,y) = 10x - 4y - 64 = 0 \\ \partial_y f(x,y) = -4x + 4y + 32 = 0 \end{array} \right. \to \left\{ \left(\frac{16}{3}, -\frac{8}{3} \right) \right\}$$

Hessienne

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_x^2 f(x,y) & \partial_x\partial_y f(x,y) \\ \partial_x\partial_y f(x,y) & \partial_y^2 f(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

La hessienne est constante. Ses valeurs propres sont 2 et 12. Elle est définie positive $\to$ f admet un minimum local au point $\left(\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.
(b) Les dérivées secondes sont constantes $\to$ les dérivées d'ordre 3 sont nulles $\to$ le reste du développement de Taylor de f à l'ordre 2 est nul. On a donc

$$f(x,y) = f\left(\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}\right) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - \frac{16}{3} & y + \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{16}{3} \\ y + \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} x - \frac{16}{3} & y - \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{16}{3} \\ y + \frac{8}{3} \end{bmatrix} \geq 0,\ \forall x, y \text{ dans } \mathbb{R}.$$

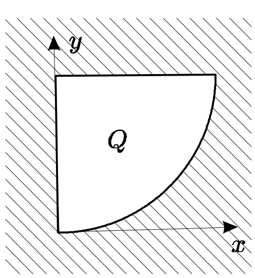
Donc f admet un minimum global au point $\left(\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.

2. (a) $d(x,y) = \|(x, y, 16 - 2x + y)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + (16 - 2x + y)^2}$
   $= \sqrt{5x^2 + 2y^2 - 4xy - 64x + 32y + 256}$
   (b) Comme $t \geq 0 \to \sqrt{t}$ est croissante, d admet un minimum global au point $\left(\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}\right)$. Le point du plan $\mathcal{P}$ le plus proche de l'origine est $\left(\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}, 8\right)$.

Exercice 3.

1.
$$I_C = \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2 + xy + y^2\right) dy dx = \frac{11}{12}$$

2. $x^2 + y^2 - 2y = x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$ est l'équation du cercle de centre $(0,1)$ et de rayon 1.



Changement de variable
coordonnées polaires de centrées en $(0,1)$
$x = r\cos\theta,\ y - 1 = r\sin\theta$

$$
\begin{aligned}
I_Q &= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\left(r^3(\cos(\theta))^2 + r^2\cos(\theta)(1+r\sin(\theta)) + r(1+r\sin(\theta))^2\right)d\theta dr\\
&= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\left(r + r^2\cos\theta + 2r^2\sin\theta + r^3 + r^3\cos\theta\sin\theta\right)d\theta dr = \frac{3}{8}\pi - \frac{11}{24}
\end{aligned}
$$

3. $I_Q + I_D = I_C \to I_D = I_C - I_Q = \frac{11}{12} - \left(\frac{3}{8}\pi - \frac{11}{24}\right) = \frac{11}{8} - \frac{3}{8}\pi.$

Exercice 4.

1. $\mathbf{r}(t) = a\left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$, $\mathbf{r}'(t) = 3a\left(-\cos^2 t\sin t, \sin^2 t\cos t\right) = 3a\cos t\sin t\,(-\cos t, \sin t)$
   $\|\mathbf{r}'(t)\| = |3a\cos t\sin t| = 3a\cos t\sin t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}$ car $0 < t < \pi/2$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos t\sin t dt = \frac{3}{2}a.$$

2. $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/\|\mathbf{r}'(t)\| = (-\cos t, \sin t)$
   $\mathbf{T}'(t) = (\sin t, \cos t)$, $\|\mathbf{T}'(t)\| = 1$, $\mathbf{N}(t) = \mathbf{T}'(t)/\|\mathbf{T}'(t)\| = (\sin t, \cos t)$

3. $\mathbf{r}''(t) = (3a\cos t\sin t\,(-\cos t, \sin t))' = \frac{3a}{2}(\sin 2t\,(-\cos t, \sin t))'$
   $= 3a\cos 2t\,(-\cos t, \sin t) + \frac{3a}{2}\sin 2t\,(\sin t, \cos t)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}''(t)\times\mathbf{r}'(t) &= \left(3a\cos 2t\,(-\cos t, \sin t) + \frac{3a}{2}\sin 2t\,(\sin t, \cos t)\right)\times\frac{3a}{2}\sin 2t\,(-\cos t, \sin t)\\
&= \left(\frac{3a}{2}\sin 2t\right)^2(\sin t, \cos t)\times(-\cos t, \sin t) = \left(\frac{3a}{2}\sin 2t\right)^2
\end{aligned}
$$

$\kappa(t) = |\mathbf{r}''(t)\times\mathbf{r}'(t)|\,/\,\|\mathbf{r}'(t)\|^3 = \left(\frac{3a}{2}\sin 2t\right)^2/\left(\frac{3a}{2}\sin 2t\right)^3 = 1/\frac{3a}{2}\sin 2t$, $R(t) = \frac{3a}{2}\sin 2t$

$$
\begin{aligned}
C_t &= \mathbf{r}(t) + R(t)\,\mathbf{N}(t) = a\left(\cos^3 t, \sin^3 t\right) + \frac{3a}{2}\sin 2t\,(\sin t, \cos t)\\
&= a\left(\cos^3 t + 3\sin^2 t\cos t, \sin^3 t + 3\cos^2 t\sin t\right)\\
&= a\left(3\cos t - 2\cos^3 t, 3\sin t - 2\sin^3 t\right)
\end{aligned}
$$