INSA Toulouse. STPI $2^{\text{ème}}$ année IC 17 janvier 2012

Examen de Mathématiques

Durée 1h30

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Le barême est indicatif.

Exercice 1 (sur 5 points) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. On cherche les fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient l'équation

$$(E) \qquad x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in D.$$

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que la fonction définie par $h(x, y) = g(y/x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et qu'elle est solution de (E).

2. On pose $\Phi(u, v) = (x, y)$ avec $x = u$, $y = uv$. Montrer que Φ est une bijection de D sur D et que Φ et l'application réciproque Φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

3. Soit f une solution de (E). On pose $s(u, v) := f(x, y)$. Montrer que $\partial_u s(u, v) = 0$, pour tout $(u, v) \in D$.

4. En déduire l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ de (E).

Exercice 2 (sur 6 points)

1. Soit $\Omega_{R,a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2\}$ le disque de centre (a, b) et de rayon R. Montrer que

$$\int_{\Omega_{R,a,b}} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi R^2}{2}(R^2 + 2a^2 + 2b^2).$$

   (*Indication* : on pourra utiliser le changement de variable donné par $x = a + r\cos\theta$ et $y = b + r\sin\theta$.)

2. Montrer que l'équation $x^2 + y^2 - x = 0$ est l'équation d'un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

3. On considère l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que D est symétrique par rapport à l'axe des x et à l'axe des y. Représenter graphiquement D et calculer son aire.

4. Déduire des questions précédentes l'intégrale double

$$I = \int_D (1 + x^2 + y^2) dx dy.$$

Exercice 3 (sur 3 points) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = e^y + xy$.

1. Déterminer les points critiques de g.
2. Le point $(-1,0)$ est-il un extremum local ?

Exercice 4 (sur 6 points) On considère un arc de la courbe appelée deltoïde, donnée par la paramétrisation suivante $M_\theta = (x(\theta), y(\theta))$ avec

$$x(\theta) = 2\cos\theta + \cos(2\theta),$$
$$y(\theta) = 2\sin\theta - \sin(2\theta),$$

et $0 < \theta < 2\pi/3$.

1. Montrer que pour tout point M_θ de cet arc de courbe on a la relation
$$(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = 16\sin^2(\frac{3\theta}{2}).$$
2. Calculer la longueur de cet arc de courbe.
3. Calculer le vecteur tangent unitaire $\underline{T}(\theta)$ ainsi que le vecteur normal principal $\underline{N}(\theta)$ en tout point M_θ de cet arc de courbe.
4. Calculer la courbure $\kappa(\theta)$ au point M_θ de cet arc de courbe.
5. Calculer les coordonnées du centre du cercle osculateur en tout point M_θ de cet arc de courbe.

Indication: On pourra utiliser les relations trigonométriques suivantes:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad 1 - \cos a = 2\sin^2(a/2)$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\tfrac{a+b}{2}\cos\tfrac{a-b}{2}, \quad \cos b - \cos a = 2\sin\tfrac{a+b}{2}\sin\tfrac{a-b}{2}$$