Corrections exercices Feuille 2

Exercice 4

1) $(x_1,x_2,x_3)\to \frac{1}{2}(x_1^2-x_3^2)$ et $(x_1,x_2,x_3)\to \sin(x_1+x_2)$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^3$; $f:(x_1,x_2,x_3)\to \left(y_1=\frac{1}{2}(x_1^2-x_3^2),\ y_2=\sin(x_1+x_2)\right)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et

$$f'(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix} \partial_{x_1}y_1=x_1 & \partial_{x_2}y_1=0 & \partial_{x_3}y_1=-x_3\\ \partial_{x_1}y_2=\cos(x_1+x_2) & \partial_{x_2}y_2=\cos(x_1+x_2) & 0\end{bmatrix}$$

2) $(x_1,x_2,x_3)\in \mathcal{D}_h$ ssi $\left.(2-y_2)\right|_{y_2=\sin(x_1+x_2)}\neq 0$

Or $\left.2-y_2\right|_{y_2=\sin(x_1+x_2)}\geq 1>0$, f est donc définie et différentiable sur $\mathbb{R}^3$; en notant $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2)$, il vient

$$h'(x) = \left.g'(y)\right|_{y=f(x)}\, f'(x)$$

$$g'(y)=\begin{bmatrix} 1 & -e^{y_2}\\ 0 & 1/(2-y_2)^2\end{bmatrix}$$

$$h'(x)=\left.\begin{bmatrix} x_1-e^{y_2}\cos(x_1+x_2) & -e^{y_2}\cos(x_1+x_2) & -x_3\\ \dfrac{\cos(x_1+x_2)}{(2-y_2)^2} & \dfrac{\cos(x_1+x_2)}{(2-y_2)^2} & 0\end{bmatrix}\right|_{\substack{y_1=\frac{1}{2}(x_1^2-x_3^2)\\ y_2=\sin(x_1+x_2)}}$$

$$h'(x)=\begin{bmatrix} x_1-e^{\sin(x_1+x_2)}\cos(x_1+x_2) & -e^{\sin(x_1+x_2)}\cos(x_1+x_2) & -x_3\\ \dfrac{\cos(x_1+x_2)}{(2-\sin(x_1+x_2))^2} & \dfrac{\cos(x_1+x_2)}{(2-\sin(x_1+x_2))^2} & 0\end{bmatrix}$$

Exercice 6

1) $h(u,v)=(x=u+v,\ y=u-v)$. Comme $(u,v)\to x=u+v$ et $(u,v)\to y=u-v$ est de classe C^∞, h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ (et donc de classe C^2). On a $f(x,y)=g(u,v)$. Il vient donc

$$\begin{cases} \partial_u g = \partial_x f\,\partial_u x+\partial_y f\,\partial_u y = \partial_x f+\partial_y f\\ \partial_v g = \partial_x f\,\partial_v x+\partial_y f\,\partial_v y = \partial_x f-\partial_y f\end{cases}$$

On résout le système précédent pour avoir

$$\partial_x f=\frac{1}{2}(\partial_u g+\partial_v g),\quad \partial_y f=\frac{1}{2}(\partial_u g-\partial_v g)$$

On utilise ces formules pour écrire

$$\partial_x^2 f=\partial_x\partial_x f=\frac{1}{2}\partial_u\left(\frac{1}{2}(\partial_u g+\partial_v g)\right)+\frac{1}{2}\partial_v\left(\frac{1}{2}(\partial_u g+\partial_v g)\right)$$

$$\partial_x^2 f=\frac{1}{4}\partial_u^2 g+\frac{1}{2}\partial_u\partial_v g+\frac{1}{4}\partial_v^2 g$$

$$\partial_y^2 f=\partial_y\partial_y f=\frac{1}{2}\partial_u\left(\frac{1}{2}(\partial_u g-\partial_v g)\right)-\frac{1}{2}\partial_v\left(\frac{1}{2}(\partial_u g-\partial_v g)\right)$$

$$\partial_y^2 f=\frac{1}{4}\partial_u^2 g-\frac{1}{2}\partial_u\partial_v g+\frac{1}{4}\partial_v^2 g$$

$$\partial_x^2 f-\partial_y^2 f=\frac{1}{2}\partial_u\partial_v g+\frac{1}{2}\partial_u\partial_v g=\partial_u\partial_v g=0.$$

2) $\partial_u(\partial_v g)=0$ entraîne que $\partial_v g$ ne dépend pas de u et donc $\partial_v g(u,v)=s(v)$. Soit $\tilde{S}$ une primitive de s ($\tilde{S}'(v)=s(v)$). On a donc $\partial_v(g-\tilde{S})=0$. Par le même raisonnement, on a donc $g(u,v)-\tilde{S}(v)=\tilde{F}(u)$. La sol. générale de (2) est donc donnée par

$$f(x,y)=F(x+y)+S(x-y)\ \text{avec}\ F(u)=\tilde{F}\left(\frac{u}{2}\right)\ \text{et}\ S(v)=\tilde{S}\left(\frac{v}{2}\right)$$

Exercice 8

$f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$

Points critiques

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 3x^2y^2(1-x-y) - x^3y^2 = x^2y^2(3-4x-3y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 2x^3y(1-x-y) - x^3y^2 = x^3y(2-2x-3y) = 0 \end{cases}$$

$x^2y = 0$ et

$$\begin{cases} 4x+3y = 3 \\ 2x+3y = 2 \end{cases} \rightarrow x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}$$

$$\left\{ (x,0),\ x \in \mathbb{R} ;\ (0,y),\ y \in \mathbb{R} ,\ \left(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}\right) \right\}$$

Extrémas

$\partial^2_x f(x,y) = -6xy^2(2x+y-1)$, $\partial^2_{xy} f(x,y) = -x^2y(8x+9y-6)$

$\partial^2_{yx} f(x,y) = \partial^2_{xy} f(x,y)$, $\partial^2_y f(x,y) = -2x^3(x+3y-1)$

$Hf(x,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2x^3(x-1) \end{bmatrix}$, 1 val propre est nulle. étude directe

$Hf(0,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 2 val propres nulles. étude directe

$Hf\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) = -\begin{bmatrix} 1/9 & 1/12 \\ 1/12 & 1/8 \end{bmatrix}$

Polynôme caractéristique : $p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1/9+\lambda & 1/12 \\ 1/12 & 1/8+\lambda \end{bmatrix}$

$$p(\lambda) = (-1)^2\left(\left(\frac{1}{9}+\lambda\right)\left(\frac{1}{8}+\lambda\right) - \frac{1}{144}\right) = \lambda^2 + \frac{17}{72}\lambda + \frac{1}{144}$$

$\Delta = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2}$; d'où 2 racines < 0

f admet au point $\left(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}\right)$ un maximum local.

Étude directe aux points $(x,0)$ et $(0,y)$

$\times$ $f(x,0) = f(0,y) = 0$; il suffit d'étudier le signe de $f(x,y)$ au voisinage de ces points ; si $xy \neq 0$ $f(x,y)$ est du même signe que $\varphi(x,y) = x(1-x-y)$ car $x^2y^2 \geq 0$.

$\times$ Au voisinage de $(0,y)$: $\varphi(x,y)$ est du même signe que $x(1-y)$ si $y \neq 1$ elle change donc de signe ; $(0, y \neq 1)$ n'est ni un maximum ni un minimum local ; au voisinage de $(x=0, y=1)$, on fait le changement de variable $h = 1-y$

$\varphi(x,y) = \tilde{\varphi}(x,h) = x(h-x)$ et on étudie le signe de $\tilde{\varphi}$ au voisinage du point $(x=0, h=0)$; pour $x = \frac{h}{2}$, $\tilde{\varphi}(x,x) \geq 0$ au voisinage de $x=0$ et pour $x=-h$, $\tilde{\varphi}(x,-x) < 0$ au voisinage de $x=0$; $(x=0, y=1)$ n'est ni un maximum ni un minimum local

× Au voisinage des points $(x, y=0)$, $\varphi(x,y)$ reste du signe de $x(1-x)$ si $x(1-x) \neq 0$; on a donc

$f(x,y)$ admet un <u>maximum</u> local au point $(x,0)$ pour $x<0$ et $x>1$ et un <u>minimum</u> local au point $(x,0)$ pour $0<x<1$. Le point $(0,0)$ a déjà été étudié ci-dessus. Pour $(x=1, y=0)$, on fait de même le changement de variable $1-x=h$; $\varphi(x,y) = (1-h)(h\,y)$

Pour $h\,y \neq 0$, le signe de $\varphi(x,y)$ est celui de $h\,y$ lorsque $(h,y) \to 0$. On voit de même là aussi que le point $(x=1, y=0)$ n'est ni un maximum ni un minimum local.