Exercice 7 (Feuille TD 2)

1) Si a est un extrémum local de f, alors
$\exists\, \eta > 0$ t.q. $\forall\, x \in B_\eta(a)$: $f(x) \geq f(a)$ (si a est un minimum local)

ou

$f(x) \leq f(a)$ (si a est un max. local).

On a que $\forall\, x_i \in \mathbb{R}$, $|x_i - a_i| < \eta$, $(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in B_\eta(a)$
$\Rightarrow x_i \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$
admet un extrémum local au point $x_i = a_i$,
donc $\partial_{x_i} f(a) = 0$.
Ceci est vrai pour tout $i = 1, \dots, n$ $\Rightarrow$ <u>a est un point critique</u>.

2) Soit a point critique t.q. $Hf(a)$ est positive définie.

$$f(x) = f(a) + (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(a) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(a) \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ 0, \text{ car } a \text{ point critique}}} + \frac{1}{2}(x-a)^T Hf(a)(x-a) + \|x-a\|^2 \varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

$$\Rightarrow f(x) - f(a) = \frac{1}{2}(x-a)^T Hf(a)(x-a) + \|x-a\|^2 \varepsilon(x)$$
$$\geq \frac{\lambda_1}{2}\|x-a\|^2 + \|x-a\|^2 \varepsilon(x) = \|x-a\|^2 \left(\frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon(x)\right).$$

[on utilise le fait que si A est une matrice pos. définie,
alors $x^T A x \geq \lambda_1 \|x\|^2$, $\forall\, x$,
où <u>$\lambda_1 > 0$</u> est <u>la plus petite valeur propre</u> de A.]

(pour une démonstration voir la fin de la page 15 du polycopié)

$\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \Rightarrow \exists\, \eta > 0$ t.q. si $\|x-a\| < \eta$, alors $|\varepsilon(x)| < \frac{\lambda_1}{4}$.

On obtient que <u>$\forall\, x \in B_\eta(a)$</u> : <u>$f(x) - f(a)$</u> $\geq \frac{\lambda_1}{4}\|x-a\|^2$ <u>≥ 0</u>,

<u>donc</u> a est un point de minimum local.

Si $Hf(a)$ est définie négative (i.e. $-Hf(a)$) est définie positive),
on a $f(a) - f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in B_\eta(a)$ $\Rightarrow$ a est un point de maximum local pour f.