$\boxed{\text{Exercice 7}}$

$u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, $P_u = I_n - \frac{1}{\|U\|^2} UU^T$.

1) $P_u^T = I_n^T - \frac{1}{\|U\|^2}(UU^T)^T = I_n - \frac{1}{\|U\|^2} UU^T = P_u$

↳ P_u symétrique.

2) $D = \mathrm{Vect}(u)$.

a) Soit $v \in D \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $v = \lambda u$.

La matrice colonne de v dans $\mathcal{B}$ (la base canonique) est $V = \lambda U$.

La matrice colonne de $p_u(v)$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$P_u V = \lambda P_u U = \lambda\left(U - \frac{1}{\|U\|^2} UU^T U\right) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

car $U^T U = \langle U, U \rangle = \|U\|^2$.

Donc $p_u(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

b) Soit $w \in D^\perp$ et W sa matrice colonne dans $\mathcal{B}$.

La matrice de $p_u(w)$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$P_u W = W - \frac{1}{\|U\|^2} U U^T W = W,$$

car $U^T W = \langle U, W \rangle = 0$. $\begin{pmatrix} u \in D \\ w \in D^\perp \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_u(w) = w$.

c) p_u est la projection orthogonale sur $D^\perp$.

$\boxed{\text{Exercice 8}}$ $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

• u <u>rotation</u> $\Leftrightarrow$ A orthogonale et $\det(A) = 1$.

$$A^T A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I_3$$

$\Rightarrow A$ orthogonale

$$\det(A) = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}}{=} \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 1.$$

$\hookrightarrow$. est une rotation.

- u est une <u>rotation autour d'un axe</u> $\Leftrightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^3 : Av = v$. $\quad (u(v) = v)$
  $v \neq 0$
  (A admet la valeur propre 1)

$$Av = v \Leftrightarrow (A - I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 0 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \end{cases}$$

$v = (x, y, z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 & \\ -y - z = 0 & (L_2 - 2L_1) \\ -y - z = 0 & (L_3 - L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases}$$

On prend $v = (1, -1, 1)$.

$\Rightarrow$ u est une rotation autour de l'axe $\boxed{\Delta = \mathrm{Vect}\,(1,-1,1)}$.

$\Rightarrow$ $\exists$ une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $A' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On veut trouver l'angle θ.

On sait que la trace de la matrice de u est invariante par changement de base

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\, A' \Rightarrow 2\cos\theta + 1 = \frac{1}{3}(2+2+2) = 2.$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6}.$$

On doit déterminer le signe de $\sin\theta$.

- <u>Rmq</u> : le signe de $\sin\theta$ est le même que le signe de $[u, Au, v]$ (le produit mixte), avec $u \in \Delta^\perp$.

Soit $u = (1, 1, 0) \in \Delta^\perp$. $\quad Au = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$[u, Au, v] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$\Rightarrow \sin\theta < 0 \Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{11\pi}{6}}$.

u est donc la rotation autour de l'axe $\Delta = \mathrm{Vect}(1,-1,1)$ et d'angle $\theta = \frac{11\pi}{6}$.

$\boxed{\text{Exercice 9}}$ $q(x,y,z) = 5x^2 + 6y^2 + 7z^2 + 4xy + 4yz$.

1) La matrice de q dans $\mathcal{C}$ est $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

On va trouver une base orthonormée directe formée de vecteurs propres de A.

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

- $E_3 = \mathrm{Ker}(A - 3I_3)$: $v = (x,y,z)$; $(A - 3I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x + 2z = 0 \\ -2x + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow E_3 = \{(2z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\underbrace{(2,-2,1)}_{\boxed{v_1}}.$$

$\|v_1\| = \sqrt{9} = 3$

Soit $b_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{3}(2,-2,1)$.

- $E_6 = \mathrm{Ker}(A - 6I_3)$; $v = (x,y,z)$, $(A - 6I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -2y \end{cases} \Rightarrow E_6 = \{(2y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\underbrace{(2,1,-2)}_{\boxed{v_2}}$$

$\|v_2\| = \sqrt{9} = 3$; soit $b_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{3}(2,1,-2)$.

- $E_9 = \mathrm{Ker}(A - 9I_3)$: $v = (x,y,z)$, $(A - 9I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ y = z = 2x \Rightarrow E_9 = \{(x, 2x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\underbrace{(1,2,2)}_{\boxed{v_3}}$$

$\|v_3\| = \sqrt{9} = 3$; soit $b_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{3}(1,2,2)$.

$\mathcal{B} := (b_1, b_2, b_3)$ est une <u>base orthonormé</u>. (on vérifie bien que $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, pour $i \neq j$)

Rmq. : On peut démontrer (en général) [17] que, si A matrice symétrique, alors
- A diagonalisable
- les espaces propres sont orthogonaux 2 à 2
- il existe une base orthonormée formée de vect. propres

- Vérifier si B est une base directe :

$$P = P_{\mathcal{E}B} = \frac{1}{3}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1' & v_2' & v_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

(la matrice de passage entre $\mathcal{E}$ et B)

$$\det(P_{\mathcal{E}B}) = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \underset{[C_2 \leftarrow C_2 - C_1\,;\, C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3]}{=} \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\cdot\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$= 1 \Rightarrow$ B est une base directe.

- La matrice semblable à A dans la base B est :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$ On a $D = P^{-1}AP$.

P est la matrice de passage entre deux bases orthonormés

$\Rightarrow$ P est orthogonale.

(car les colonnes de P sont 2 à 2 orthogonaux et de norme 1 (base orthonormée))

On a donc $P^{-1} = P^{T} \Rightarrow D = P^{T}AP$.

On reconnait la formule de chang. de base pour les formes quadratiques

$\Rightarrow$ D est la matrice de q dans la base B

$\Rightarrow$ si $v = X b_1 + Y b_2 + Z b_3$, alors $q(v) = 3X^2 + 6Y^2 + 9Z^2$.

2) P est orthogonale et $\det(P) = 1 \Rightarrow$ la transf. géométrique associée à P est une rotation.