Correction Exercice 4 - feuille 4

1. Repère de Frenet : $\underline{N}'(s) = -\frac{1}{s\sqrt{2}}\left(\underline{T}(s) + \underline{B}(s)\right)$

$$\underline{N}''(s) = \frac{1}{s^2\sqrt{2}}\left(\underline{T}'(s) + \underline{B}'(s)\right) - \frac{1}{s\sqrt{2}}\left(\underline{T}'(s) + \underline{B}'(s)\right)$$

$$= -\frac{1}{s}\underline{N}'(s) - \frac{1}{s\sqrt{2}}\left(\frac{1}{s\sqrt{2}} + \frac{1}{s\sqrt{2}}\right)\underline{N}(s) = -\frac{1}{s}\underline{N}'(s) - \frac{1}{s^2}\underline{N}(s)$$

$s^2\underline{N}''(s) + s\underline{N}'(s) + \underline{N}(s) = 0$. Comme $\underline{T}'(s) = \frac{1}{s\sqrt{2}}\underline{N}(s)$

$$s^2\left(s\sqrt{2}\,\underline{T}'\right)''(s) + s\left(s\sqrt{2}\,\underline{T}'\right)'(s) + s\sqrt{2}\,\underline{T}'(s) = 0.$$

$$s^2\left(s\sqrt{2}\,T''' + 2\sqrt{2}\,T''\right) + s\left(s\sqrt{2}\,T'' + \sqrt{2}\,T'\right) + s\sqrt{2}\,T' = 0.$$

$$s^3\sqrt{2}\,T''' + 3\sqrt{2}\,s^2T'' + 2\sqrt{2}\,sT' = 0 ;\quad s\sqrt{2}\left(s^2T''' + 3sT'' + 2T'\right) = 0.$$

$s\sqrt{2}\left(s^2T'' + sT' + T\right)' = 0$; on a alors par continuité en 0

$$\boxed{\left(s^2T'' + sT' + T\right)' = 0.}$$

Il s'ensuit que $s^2\underline{T}'' + s\underline{T}' + \underline{T} = \underline{K}$ où $\underline{K}$ est un vecteur constant de $\mathbb{R}^3$.

2. On pose $z(u) = y(s)$ avec $s = e^u$ d'où $z'(u) = y'(s)\partial_u s = y'(s)s$.

$z''(u) = (y'(s)s)'s = y''s^2 + y's$; $z''(u) + z(u) = k$

Sol. G^le éq. ss. 2^nd membre $v(u) = c\cos u + d\sin u$.

Sol. P^cst. $w(u) = k$; d'où $z(u) = c\cos u + d\sin u + k$.

3. On a ainsi $\underline{T}(s) = \underline{C}\cos u + \underline{D}\sin u + \underline{K}$.

$$\eta'_u = \eta'_s\, s = \underline{T}(s)\, s = e^u\left(\underline{C}\cos u + \underline{D}\sin u + \underline{K}\right)$$

$$\eta_u = \int e^u\left(\underline{C}\cos u + D\sin u + \underline{K}\right)du + E$$

Pour trouver une primitive $\int (\underline{C} \cos u + \underline{D} \sin u) e^u \, du$, on opère composante par composante ; $(c \cos u + d \sin u) e^u$ étant cette composante, on cherche cette primitive sous la forme $(a \cos u + b \sin u) e^u$. On a ainsi

$$\left(e^u (a \cos u + b \sin u) \right)' = e^u (a \cos u + b \sin u - a \sin u + b \cos u)$$

$$= e^u \left((a+b) \cos u + (b-a) \sin u \right).$$

Il suffit ainsi de résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} a + b = c \\ -a + b = d \end{cases} \quad \text{d'où} \quad a = \frac{c-d}{2} \; ; \; b = \frac{c+d}{2}$$

D'où le paramétrage

$$\boxed{M_u = e^u \left(\underline{A} \cos u + \underline{B} \sin u + \underline{K} \right) + \underline{E}}$$

$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{K}$, $\underline{E}$ étant 4 vecteurs constants de $\mathbb{R}^3$