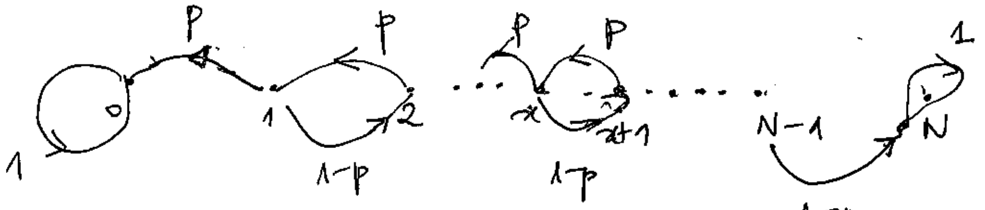
Correction Exo. 5, TD 3

4GMM, Markov
2014-2015
Compléments de Proba

1)



Classes : $\{0\}$ récurrente (état absorbant)

$\{1, 2, \dots, N-1\}$ ouverte $\Rightarrow$ transitoire

$\{N\}$ récurrente (état absorbant)

car $1 \rightsquigarrow 0$ mais $0 \not\rightsquigarrow 1$

2) Soit $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{0, N\}\}$. On veut m.q. $\mathbb{P}(T<\infty) = 1$.

On a $\mathbb{P}_0(T<\infty) = 1$, $\mathbb{P}_N(T<\infty) = 1$.

(on a même $\mathbb{P}_0(T=0) = \mathbb{P}_N(T=0) = 1$).

Si $X_0 \notin \{0, N\}$, alors $T \geq 1$ et on peut écrire

$$T = \inf\{n+1 \geq 1 : X_{n+1} \in \{0,N\}\}$$
$$= 1 + \underbrace{\inf\{n \geq 0 : X_{n+1} \in \{0,N\}\}}_{T'}$$

Par la propriété de Markov, on a que
$$\mathcal{L}oi(T' \mid X_1 = y) = \mathcal{L}oi(T \mid X_0 = y),$$
car la chaîne de Markov décalée $(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ conditionnellement à $X_1 = y$, est la même que la loi de la CM initiale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conditionnellement à $X_0 = y$.

$$\Rightarrow \forall x \neq 0, N : \mathbb{P}_x(T<\infty) = \mathbb{P}_x(T<\infty \mid X_1 = x-1) \times \mathbb{P}_x(X_1 = x-1) + \mathbb{P}_x(T<\infty \mid X_1 = x+1) \times \mathbb{P}_x(X_1 = x+1)$$

$$= \mathbb{P}_x(T'<\infty \mid X_1 = x-1) \times P(x, x-1) + \mathbb{P}_x(T'<\infty \mid X_1 = x+1) \times P(x, x+1)$$

prop. de Markov
$$= p \times \mathbb{P}_{x-1}(T<\infty) + (1-p)\,\mathbb{P}_{x+1}(T<\infty).$$

On obtient la formule de récurrence :
$$(1-p)\,\mathbb{P}_{x+1}(T<\infty) - \mathbb{P}_x(T<\infty) + p\,\mathbb{P}_{x-1}(T<\infty) = 0.$$
avec condition limite $\mathbb{P}_0(T<\infty) = \mathbb{P}_N(T<\infty) = 1$.

On peut l'écrire comme

$$(1-p)\Big(\underbrace{\mathbb{P}_{x+1}(T<\infty)-\mathbb{P}_x(T<\infty)}_{a_{x+1}}\Big) = p\Big[\underbrace{\mathbb{P}_x(T<\infty)-\mathbb{P}_{x-1}(T<\infty)}_{a_x}\Big]$$

On a la formule de récurrence pour $(a_x)_x$:

$$a_{x+1} = \frac{p}{1-p}\, a_x \Rightarrow a_x = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{x-1} a_1$$

$\Rightarrow a_N = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{N-1} a_1$. Mais $a_N = 1-\mathbb{P}_{N-1}(T<\infty)\ \boxed{\geq 0}$

et $a_1 = \mathbb{P}_1(T<\infty) - 1\ \boxed{\leq 0}$.

On déduit que l'on a forcément $a_1 = a_N = 0$

et donc $a_x = 0$, $\forall x = 1, \dots, N$.

$\Rightarrow \mathbb{P}_0(T<\infty) = \mathbb{P}_1(T<\infty) = \dots = \mathbb{P}_N(T<\infty) = 1$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(T<\infty) = \sum_{x=0}^{N} \underbrace{\mathbb{P}_x(T<\infty)}_{1} \mathbb{P}(X_0 = x) = 1$

. Donc la chaîne va être absorbée en un temps fini p.s.
(résultat qui est vrai plus généralement pour n'importe quelle chaîne à espace d'états fini qui admet des états absorbants).

↳ il va y avoir forcément un gagnant, en temps fini p.s.

3) En utilisant la propriété de Markov de nouveau on obtient :

• Si $x = N$: $\mathbb{P}_x(T_N<\infty) = 1$ (on a même $\mathbb{P}_x(T_N = 1) = 1$)

$x = 0$: $\mathbb{P}_x(T_N<\infty) = 0$

$X_0 = x \neq 0, N$: $T_N = 1 + T_N'$, avec $T_N' = \inf\{n \geq 1 : X_{n+1} = N\}$

et $\mathbb{P}_x(T_N<\infty) = \mathbb{P}_{x-1}(T_N<\infty) \times \underbrace{P(x,x-1)}_{p} + \mathbb{P}_{x+1}(T_N<\infty) \times \underbrace{P(x,x+1)}_{1-p}$

d'où $u_x = p\, u_{x-1} + (1-p)\, u_{x+1}$, avec $u_0 = 0$, $u_N = 1$.

4) En posant $a_x = u_x - u_{x-1}$ on a $a_{x+1} = \frac{p}{1-p} a_x$

$$\Rightarrow a_x = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{x-1} a_1 \Rightarrow u_x - u_{x-1} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{x-1} \cdot u_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x = u_{x-1} + \left(\frac{p}{1-p}\right)^{x-1} \cdot u_1, & \forall x = 1, \dots, N \\ u_N = 1, \ u_0 = 0 \end{cases}$$

Par récurrence on obtient la formule générale

$$u_x = \underset{\underset{0}{\parallel}}{u_0} + u_1 \times \sum_{k=0}^{x-1}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^x}{1-\frac{p}{1-p}}$$

si $p \neq \frac{1}{2}$

$$= u_1 \times \left[1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^x\right] \times \frac{1-p}{1-2p}.$$

$$\Rightarrow \quad 1 = u_N = u_1 \times \left[1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^N\right] \times \frac{1-p}{1-2p}$$

On obtient que $u_1 = \frac{1-2p}{1-p} \times \frac{1}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^N}$.

$$\hookrightarrow \quad \boxed{u_x = \frac{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^x}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^N}}, \quad \text{si } p \neq \frac{1}{2}.$$

Si $p = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $u_x = u_1 \times x$ $\Rightarrow$ $u_N = u_1 \times N \overset{!}{=} 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{N}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_x = \frac{x}{N}}$$

5) $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{0, N\}\}$

Si $X_0 = 0$, $T = 0$

$X_0 = N$, $T = 0$.

$X_0 \notin \{0,N\} \Rightarrow T = 1 + T'$, $T' = \inf\{n \geq 0 : X_{n+1} \in \{0,N\}\}$

et $\mathbb{E}_x(T) = \mathbb{E}_x(T \mid X_1 = x-1) \times P(x, x-1) + \mathbb{E}_x(T \mid X_1 = x+1) \times P(x, x+1)$

propriété de Markov car $\mathcal{L}(T' \mid X_1 = x-1) = \mathcal{L}oi(T \mid X_0 = x-1)$

$$= \left(1 + \mathbb{E}_{x-1}(T)\right) \times p + \left(1 + \mathbb{E}_{x+1}(T)\right)(1-p)$$

$$= 1 + p\,\mathbb{E}_{x-1}(T) + (1-p)\,\mathbb{E}_{x+1}(T).$$

On a la relation de récurrence :

$$(1-p)\,\mathbb{E}_{x+1}(T) = \mathbb{E}_x(T) - p\,\mathbb{E}_{x-1}(T) - 1, \quad \text{avec } \mathbb{E}_0(T) = \mathbb{E}_N(T) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad (1-p)\underbrace{\left(\mathbb{E}_{x+1}(T) - \mathbb{E}_x(T)\right)}_{b_{x+1}} = p\underbrace{\left(\mathbb{E}_x(T) - \mathbb{E}_{x-1}(T)\right)}_{b_x} - 1$$

$p = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow b_{x+1} = b_x - 2 \quad \Rightarrow \quad b_{x+1} = b_1 - 2x.$$

Si on note $m_x = \mathbb{E}_x(T)$ on obtient

$$m_{x+1} = m_x + \underset{\underset{m_1}{\parallel}}{b_1} - 2x \quad \Rightarrow \quad m_x = x \cdot m_1 - 2\sum_{k=0}^{x-1} k.$$

car $m_0 = 0$ (par récurrence on obtient la formule générale)

$$\Rightarrow m_x = x \cdot m_1 - \cancel{2} \cdot \frac{(x-1)x}{\cancel{2}} = x(m_1 - x + 1)$$

Mais $m_N = 0 = N(m_1 - N + 1) \Rightarrow \underline{m_1 = N-1}$

$$\Rightarrow \boxed{m_x = x(N-x)}$$