Correction de quelques exercices de TD

EXO. 10 TD 1

$(U_n)_{n\geq 1}$ iid $\sim \mathcal{N}(0;1)$.

$$\begin{cases} X_1 = U_1 \\ X_{n+1} = \theta X_n + U_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad \text{Ici } \theta \in]-1,1[\setminus \{0\}.$$

(1) La démonstration par récurrence est immédiate en notant que

$$X_{n+1} = \theta X_n + U_{n+1} = \theta \sum_{k=1}^{n} \theta^{n-k} U_k + U_{n+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \theta^{n+1-k} U_k + \theta^{n+1-(n+1)} U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \theta^{n+1-k} U_k .$$

(2) les (U_k) étant iid $\sim \mathcal{N}(0;1)$, on en déduit que X_n suit une loi normale, centrée car les U_k le sont, et de variance

$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} \theta^{n-k} U_k\right) \underset{\perp\!\!\!\perp \text{ des } (U_k)}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(\theta^{n-k} U_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\theta^{n-k})^2 \mathrm{Var}(U_k) = \sum_{k=1}^{n} \theta^{2(n-k)} \times 1$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (\theta^2)^k = \frac{1-\theta^{2n}}{1-\theta^2}$$

(3) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Cov}(X_n; U_{n+1}) = 0$ car $X_n \perp\!\!\!\perp U_{n+1}$, la v.a. X_n étant $\sigma(U_1; U_2; \dots; U_n)$ - mesurable par la qu. (1), et les (U_k) étant $\perp\!\!\!\perp$. D'où, on en déduit que :

$$\mathrm{Cov}(X_n; X_{n+1}) = \mathrm{Cov}(X_n; \theta X_n + U_{n+1})$$
$$= \theta\, \mathrm{Cov}(X_n; X_n) + \mathrm{Cov}(X_n; U_{n+1}) \quad \text{par bilinéarité}$$
$$= \theta\, \mathrm{Var}(X_n) + 0$$
$$= \theta \times \frac{1-\theta^{2n}}{1-\theta^2}, \quad \text{qui est} \neq 0 \text{ car } \theta \in]-1,0[\cup]0,1[.$$

(4) D'après la qu. (1), on voit que la matrice suivante convient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \theta & 1 & 0 & & \vdots \\ \theta^2 & \theta & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \theta^{n-1} & \theta^{n-2} & \theta^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{qui est évidemment inversible.}$$

Ainsi, X s'obtient comme transformation linéaire inversible du vecteur U, qui est évidemment gaussien car les U_k sont $\perp\!\!\!\perp$ et de loi normale. On en déduit que X est lui aussi un vecteur gaussien.

(5) Le vecteur X étant gaussien, ses coordonnées sont $\perp\!\!\!\perp$ ssi sa matrice de covariance est diagonale.
Or on a vu à la qu. (3) que $\text{Cov}(X_n; X_{n+1}) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_*$ donc X ne peut avoir ses coordonnées $\perp\!\!\!\perp$.

(6) Étant donné $n \in \mathbb{N}_*$, on veut montrer que $\forall p \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\mathbb{E}(X_n / \mathcal{F}_p) = \theta^{n-p} X_p, \quad \text{où} \quad \mathcal{F}_p = \sigma(U_1, U_2, \dots, U_p).$$

- cas $p = n$: $X_n = X_p$ étant $\mathcal{F}_p$-mesurable, on a le résultat.
- cas $p \in \{1, \dots, n-1\}$: on a

$$\mathbb{E}(X_n / \mathcal{F}_p) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \theta^{n-k} U_k / \mathcal{F}_p\right)$$

$$= \mathbb{E}\Big[\underbrace{\sum_{k=1}^{p} \theta^{n-k} U_k}_{\mathcal{F}_p\text{-mesurable}} + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{n} \theta^{n-k} U_k}_{\perp\!\!\!\perp \text{ de } \mathcal{F}_p, \text{ les } (U_k) \text{ étant } \perp\!\!\!\perp} / \mathcal{F}_p\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \theta^{n-k} U_k + \mathbb{E}\Big[\sum_{k=p+1}^{n} \theta^{n-k} U_k\Big]$$

$$= \theta^{n-p} \sum_{k=1}^{p} \theta^{p-k} U_k + 0, \quad \text{les } (U_k) \text{ étant centrées.}$$

$$= \theta^{n-p} X_p.$$

EXo.7 TD 2

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CM à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Notons $(*)$ l'égalité

$$\mathbb{E}_x[h(X_n)] = \mathbb{E}[h(X_{m+n}) \mid X_m = x], \ \forall m,n \in \mathbb{N}.$$

Rq. : cette égalité est triviale en utilisant l'homogénéité des CM.

Notons $m(x) = \mathbb{E}_x(X_1)$ et $v(x) = \mathrm{Var}_x(X_1) = \mathbb{E}_x(X_1^2) - \mathbb{E}_x(X_1)^2$

(1) En utilisant $(*)$ avec $n = 1$ et $h(z) = z$, on obtient

$$\mathbb{E}_x(X_1) = \mathbb{E}(X_{m+1} \mid X_m = x),$$ c.à.d. le résultat désiré.

(2) Par la formule des probas. totales, on a

$$\mathbb{E}_x[X_{n+1}] = \sum_{y\in E} \mathbb{E}_x(X_{n+1} \mid X_n = y)\, P_x(X_n = y)$$

$$\underset{\text{(propriété de Markov : on oublie le } x)}{=} \sum_{y\in E} m(y)\, P^n(x,y) = \mathbb{E}_x[m(X_n)].$$

(3) Tout comme précédemment, on a que

$$v(x) = \mathbb{E}[X_{n+1}^2 \mid X_n = x] - m(x)^2.$$

D'où $\mathrm{Var}_x(X_{n+1}) = \mathbb{E}_x(X_{n+1}^2) - \mathbb{E}_x(X_{n+1})^2$

$$\underset{\text{FPT}}{=} \sum_{y\in E} \mathbb{E}_x[X_{n+1}^2 \mid X_n = y]\, P_x(X_n = y) - \mathbb{E}_x[m(X_n)]^2$$

$$\underset{\text{(prop. de Markov)}}{=} \sum_{y\in E} (v(y) + m(y)^2)\, P^n(x,y) - \mathbb{E}_x[m(X_n)]^2$$

$$= \mathbb{E}_x[v(X_n)] + \mathbb{E}_x[m(X_n)^2] - \mathbb{E}_x[m(X_n)]^2.$$

Au final, $Var_x(X_{n+1}) = \mathbb{E}_x[v(X_n)] + Var_x[m(X_n)]$.

(4) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la marche aléatoire asymétrique.

(a) $m(x) = \mathbb{E}_x(X_1) = \sum_{y\in E} y\, P(x,y) = (x+1)\,P(x,x+1) + (x-1)\,P(x,x-1)$

$$= p(x+1) + q(x-1).$$

$$= x + p - q.$$

$$v(x) = \mathbb{E}_x(X_1^2) - m(x)^2$$

$$= (x+1)^2 p + (x-1)^2 q - (x+p-q)^2$$

$$= \dots = 4pq.$$

(b) On a $\mathbb{E}_x(X_n) = \mathbb{E}_x[m(X_{n-1})] = \mathbb{E}_x[X_{n-1}+p-q]$

$= \mathbb{E}_x(X_{n-1}) + p - q.$ (suite arithmétique)

Ainsi on obtient $\mathbb{E}_x(X_n) = x + n(p-q)$.

De même, $Var_x(X_n) = Var_x[m(X_{n-1})] + \mathbb{E}_x[v(X_{n-1})]$

$= Var_x(X_{n-1} + p - q) + 4pq$

$= Var_x(X_{n-1}) + 4pq$ (suite arithmétique)

D'où $Var_x(X_n) = 4pq \times n$.

(c) On sait que $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} U_i$, où les (U_i) sont iid de loi de Rademacher asymétrique, càd.

$\mathbb{P}(U_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(U_i = -1) = 1 - q$.

De $\oplus$, les (U_i) sont $\perp\!\!\!\perp$ de X_0.

D'où $\mathbb{E}_x(X_n) = \mathbb{E}_x[X_0 + \sum_{i=1}^{n} U_i] = x + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_x(U_i)$

$= x + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(U_i)$ car les (U_i) sont $\perp\!\!\!\perp$ de X_0.

$= x + n\,\mathbb{E}(U_1) = x + n(p-q)$.

Enfin, $\mathrm{Var}_x(X_n) = \mathrm{Var}_x\left(X_0 + \sum_{i=1}^{n} U_i\right)$

$$= \mathrm{Var}_x\left(x + \sum_{i=1}^{n} U_i\right)$$

$$= \mathrm{Var}_x\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right)$$

$$= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) \quad \text{car les } (U_i) \text{ sont } \perp\!\!\!\perp \text{ de } X_0.$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(U_i) \quad \text{par } \perp\!\!\!\perp \text{ des } (U_i)$$

$$\underset{\text{(les } (U_i) \text{ ont même loi)}}{=} n \,\mathrm{Var}(U_1) = 4pq \times n.$$