Correction examen de Compléments de Probabilités
4GMM, 2014-2015

$\boxed{\text{Exc. 1}}$ Pour $n \geq k \geq 0$ et $n \geq 1$ on a :

1) $$\mathbb{P}(X=n \mid Y=k) = \frac{\mathbb{P}(Y=k \mid X=n) \times \mathbb{P}(X=n)}{\mathbb{P}(Y=k)} \quad \text{(formule de Bayes)}$$

$$= \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \times \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}}{\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}} = \underbrace{\frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(1-p)}}.$$

Pour $n=k=0$: $$\mathbb{P}(X=0 \mid Y=0) = \frac{\overbrace{\mathbb{P}(Y=0 \mid X=0)}^{1} \times \mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(Y=0)} = \frac{\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(Y=0)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda p}} = \underbrace{e^{-\lambda(1-p)}}$$ qui vérifie encore la formule.

2) $$\mathbb{E}[X \mid Y=k] = \sum_{n=0}^{\infty} n \times \mathbb{P}(X=n \mid Y=k) = \sum_{n=k}^{\infty} n \times \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(1-p)}$$

$j = n-k \rightsquigarrow$ $$= \sum_{j=0}^{\infty} (j+k) \times \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} e^{-\lambda(1-p)}$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} j \times \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} \times e^{-\lambda(1-p)}}_{\lambda(1-p)} + k \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} e^{-\lambda(1-p)}}_{1}$$

car espérance de la loi de Poisson $(\lambda(1-p))$

$$= \lambda(1-p) + k = \varphi(k) \quad \text{avec } \varphi \text{ borélienne.}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbb{E}[X \mid Y] = \varphi(Y) = \lambda(1-p) + Y}.$$

3) $X \sim$ Poisson (100) donc $\lambda = 100$

$Y =$ le nb. de voitures qui ont pris la direction A.

Loi $(Y \mid X=n) = \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$, $p = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X \mid Y=100] = \lambda(1-p) + 100 = \frac{2}{3} \times 100 + 100 = \frac{5}{3} \times 100$$

$$= \underline{166,(6)}$$

$\boxed{\text{Exc. 2}}$ $m = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

1) $X \sim \mathcal{N}(m_1, \Gamma_{11}) = \mathcal{N}(1, 1)$

$Y \sim \mathcal{N}(m_2, \Gamma_{22}) = \mathcal{N}(-1, 4)$

$X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \underbrace{\mathrm{Var}(X+Y)}_{\parallel}) = \mathcal{N}(0, 7)$

car combinaison linéaire non-nulle de X et Y

$\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12}$
$= 1 + 4 + 2 = 7$

2) $\begin{pmatrix} X \\ Y - aX - b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}$

A est inversible car $\det(A) = 1 \neq 0$

$\hookrightarrow$ $\begin{pmatrix} X \\ Y - aX - b \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien de vecteur moyenne

$A \cdot m + \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a-b-1 \end{pmatrix}$

et de matrice de covariance $A\Gamma A^T$:

$A\Gamma A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a+1 & -a+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a+1 \\ -a+1 & (-a+1)(-a)-a+4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ 1-a & a^2 - 2a + 4 \end{pmatrix}.$

3) Pour que $Y - aX - b \perp\!\!\!\perp X$ on doit avoir $A\Gamma A^T$ diagonale

$\Leftrightarrow \boxed{a = 1}$

Pour que $\mathbb{E}(Y - aX - b) = 0$ on doit avoir $-a-b-1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{b = -a - 1 = -2}$

4) $\mathbb{E}\left[(Y - aX - b)\,h(X)\right] \underset{\text{indép.}}{=} \underbrace{\mathbb{E}(Y - aX - b)}_{0} \cdot \mathbb{E}(h(X)) = 0$.

5) +6) On a $\mathbb{E}[Y \cdot h(X)] = \mathbb{E}[(aX+b)\,h(X)]$, $\forall\, h$ borélienne

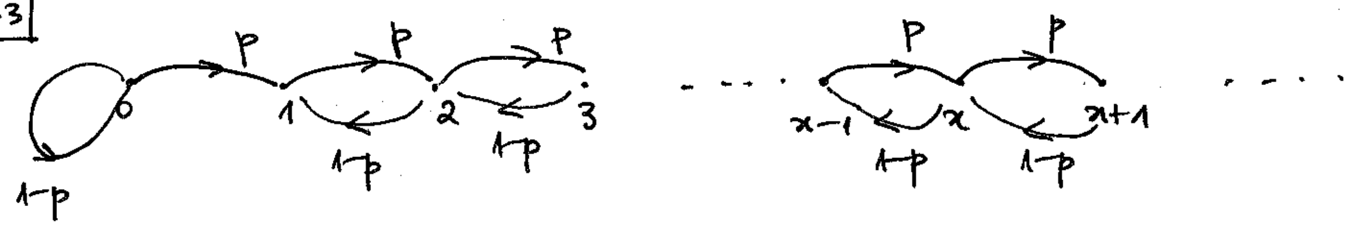
et $aX + b$ est $\sigma(X)$-mesurable

$\Rightarrow$ par déf. de l'espérance conditionnelle, on a

$\mathbb{E}[Y|X] = aX + b = X - 2 \sim \boxed{\mathcal{N}(-1, 1)}$

Donc $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = -1 = \mathbb{E}(Y)$

Exc. 3

1) 

$P(x, x+1) = \mathbb{P}(\text{un nouveau client arrive}) = p$

$P(x, x-1) = \mathbb{P}(\text{un client quitte la file}) = 1-p$, si $x \geq 1$.

$P(0,1) = p$, $P(0,0) = 1-p$, $P(0,y) = 0$ si $y \neq 0,1$.

2) Tous les états communiquent entre eux, donc il y a une seule classe de communication : $\mathbb{N}$.
La chaîne est donc irréductible.

3) $P(0,0) > 0 \Rightarrow$ l'état 0 est apériodique.
Comme la chaîne est irréd., tous les états sont donc apériod. (de période égale à 1).

4) Pour $p = \frac{1}{2}$ la "matrice" P est bi-stochastique
$\Rightarrow$ la mesure uniforme est invariante pour P :

$$(\pi P)(y) = \sum_{x=0}^{\infty} \pi(x) P(x,y) = \sum_{x=0}^{\infty} P(x,y) = 1 = \pi(y), \forall y \in \mathbb{N}.$$

Comme la chaîne est irréductible et récurrente, la mesure invariante est unique à une cte. de multiplicité près.

Mais $\pi(\mathbb{N}) = \sum_{x=0}^{\infty} \pi(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ toutes les mesures invariantes sont de masse totale infinie et $\nexists$ proba. invariante $\Rightarrow$ la chaîne est <u>récurrente nulle</u>.

5) $\pi(x) P(x, x+1) = \pi(x+1) P(x+1, x)$, $\forall x \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \pi(x) \cdot p = \pi(x+1) \cdot (1-p) \Leftrightarrow \pi(x+1) = \frac{p}{1-p} \times \pi(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}$.

La suite $(\pi(x))_{x \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{p}{1-p}$

donc $\pi(x) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^x \cdot \pi(0)$.

On cherche π mesure de proba donc $\sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{p}{1-p}\right)^x \cdot \pi(0) = 1$.

Comme $p < \frac{1}{2}$ on a $\frac{p}{1-p} < 1$ donc $\sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{p}{1-p}\right)^x = \frac{1}{1 - \frac{p}{1-p}} = \frac{1-p}{1-2p}$.

$\Rightarrow \pi(0) = \frac{1-2p}{1-p} \Rightarrow \boxed{\pi(x) = \frac{1-2p}{1-p} \times \left(\frac{p}{1-p}\right)^x, \forall x \in \mathbb{N}}$

6) π proba. réversible $\Rightarrow$ π invariante

car $\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \pi(x) P(x,y)}_{(\pi P)(y)} = \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \pi(y) P(y,x)}_{= \pi(y)}$, $\forall y \in \mathbb{N}$.

Comme la chaîne est irréd. et récurrente,
la proba invariante, si elle existe, est unique.
Donc on a unicité de la proba. invariante.

7) Comme chaîne irréd. et récurrente,
et comme il existe une proba inv. $\Rightarrow$ chaîne récurrente positive.

8) La chaîne est irréd., réc. positive et apériodique,
et π est l'unique proba. invariante,
alors $\mathbb{P}_0(X_n = 0) \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi(0) = \dfrac{1-2p}{1-p}$.

9) $\mathbb{E}_0(T_0) = \dfrac{1}{\pi(0)} = \boxed{\dfrac{1-p}{1-2p}}$.

$T_0 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$