# Correction CC2 – MAS 1

## 2014 – 2015

$\boxed{\text{Exc. 2}}$

1) • $\pi_x P^{(s)}(x,y) = \min\left(\pi_x Q^{(s)}(x,y), \pi_y Q^{(s)}(y,x)\right) = \pi_y P^{(s)}(y,x)$, $\forall\, x,y \in E$

$\Rightarrow$ $P^{(s)}$ réversible par rapport à $\pi$, $\forall s \in \{1,\dots,N\}$.

$\Rightarrow$ $\pi_x P(x,y) = \frac{1}{N}\sum_s \pi_x P^{(s)}(x,y) = \frac{1}{N}\sum_s \pi_y P^{(s)}(y,x) = \pi_y P(y,x)$

$\hookrightarrow$ P réversible par rapport à $\pi$.

• Soit $x \neq y \in E$. Soit $s_1, s_2, \dots, s_k$ (avec $1 \leq k \leq N$) les sites auxquels $x$ et $y$ diffèrent :

$$\begin{cases} x(s_i) \neq y(s_i), & i = 1,\dots,k \\ x(s) = y(s) & \text{si } s \neq s_1,\dots,s_k. \end{cases}$$

On a une probabilité non-nulle de transformer $x$ en $y$ en $k$ étapes, en modifiant à chaque fois un des sites $s_1,\dots,s_k$.

Si $Q^{(s)}(x,y) > 0$, alors $P^{(s)}(x,y) > 0$ et donc $P(x,y) > 0$ aussi.

Si on note $x_1$ le vecteur obtenu à partir de $x$ en changeant $x(s_1)$ en $y(s_1)$,

$x_2$ le vecteur obtenu à partir de $x_1$ en changeant $x_1(s_2)$ en $y(s_2)$,

et ainsi de suite jusqu'à la modification de la valeur au site $s_k$ en $y(s_k)$,

on a $P_{x x_1} P_{x_1 x_2} \cdots P_{x_{k-1} y} > 0$,

ce qui prouve que $x$ communique avec $y$ en $k$ étapes.

$\hookrightarrow$ P irréductible.

2) a) Si $\boxed{x \sim_s y}$ : $\pi_x Q^{(s)}(x,y) = \dfrac{\pi_x \pi_y}{\sum_{z \sim_s x} \pi_z} = \dfrac{\pi_y \pi_x}{\sum_{z \sim_s y} \pi_z} = \pi_y Q^{(s)}(y,x)$.

car $z \sim_s x \Leftrightarrow z \sim_s y$

$\Rightarrow$ $Q^{(s)}$ réversible par rapport à $\bar\pi$.

$\Rightarrow$ $\min\left(1, \underbrace{\frac{\bar\pi_y Q^{(s)}(y,x)}{\bar\pi_x Q^{s}(x,y)}}_{1}\right) = 1$, $\forall x \sim_s y$.

$\Rightarrow$ $P^{(s)}(x,y) = Q^{(s)}(x,y)$, $\forall x \sim_s y$.

Si $x \not\sim_s y$ on a $P^{s}(x,y) = Q^{(s)}(x,y) = 0$.

$\hookrightarrow$ $\underline{P^{(s)} = Q^{(s)}}$.

b) $P^{(s)}(x,x) = Q^{(s)}(x,x) > 0$ car $x \sim_s x$.

$\forall s$: $\Rightarrow$ $\forall x \in E$, $P(x,x) > 0$

$\Rightarrow$ $P$ apériodique.

La chaîne $(X_n)_n$ est irréd. (donc récurrente pos. car $E$ fini)

et apériodique $\}$ donc $(X_n)_n$ converge en loi vers $\bar\pi$ quand $n \to \infty$.

et réversible$/_{\bar\pi}$ $\Rightarrow$ $\bar\pi$ invariante pour $P$ $\Big\}$

c) Oui, car la constante de multiplication n'apparaît pas (se simplifie) dans $Q^{(s)}(x,y) = \dfrac{\bar\pi_y}{\sum_{z \sim_s x} \bar\pi_z}$

et dans $\min\left(1, \dfrac{\bar\pi_y Q^{(s)}(y,x)}{\bar\pi_x Q^{(s)}(x,y)}\right)$.

3) a) $\sum_{y \in E} Q^{(s)}(x,y) = \sum_{y \sim_s x} \frac{1}{|C|} = 1$ car $|\{y : y \sim_s x\}| = |C|$.

(on a $|C|$ valeurs possibles pour le site $s$)

donc $Q^{(s)}$ matrice de transition.

Comme $x \sim_s y \Leftrightarrow y \sim_s x$

on a $Q^{(s)}(x,y) = Q^{(s)}(y,x) = \begin{cases} \frac{1}{|C|} & \text{si } x \sim_s y \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$.

$\hookrightarrow$ $Q$ symétrique.

$\Rightarrow$ $\boxed{P^{(s)}(x,y) = \frac{1}{|C|} \times \min\left(1, \frac{\bar\pi_y}{\bar\pi_x}\right), \text{ si } x \sim_s y \quad (\text{et } 0 \text{ sinon})}$

b) $\forall s$ : $P^{(s)}(x,x) = 1 - \sum_{\substack{y \neq x \\ y \sim_s x}} P^{(s)}(x,y) = 1 - \frac{1}{|C|} \underbrace{\sum_{\substack{y \neq x \\ y \sim_s x}}}_{\text{on a } |C|-1 \text{ termes dans la somme}} \underbrace{\min\left(1, \frac{\pi_y}{\pi_x}\right)}_{\leq 1}$

$$\geq 1 - \frac{|C|-1}{|C|} = \frac{1}{|C|} > 0$$

$\hookrightarrow P(x,x) > 0, \quad \forall x \in E$

$\hookrightarrow P$ apériodique.

De la même façon qu'à la question 2),

on a $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{loi}} \pi$.