Correction Exercice 2-3
CC1. MAS. 2012-2013

Exercice 2:

$$\mathbb{P}(X_{n+k}=x_{n+k} \mid Y_{0:n}=y_{0:n}) = \frac{\mathbb{P}(X_{n+k}=x_{n+k}, Y_{0:n}=y_{0:n})}{\mathbb{P}(Y_{0:n}=y_{0:n})}$$

$$= \sum_{z\in E} \frac{\mathbb{P}(X_{n+k}=x_{n+k}, X_n=z, Y_{0:n}=y_{0:n})}{\mathbb{P}(Y_{0:n}=y_{0:n})}$$

$$= \sum_{z\in E} \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+k}=x_{n+k} / X_n=z)}_{p^k(z, x_{n+k})} \cdot \underbrace{\frac{\mathbb{P}(X_n=z, Y_{0:n}=y_{0:n})}{\mathbb{P}(Y_{0:n}=y_{0:n})}}_{\Pi_n(y_{0:n}, z)}$$

$$= \sum_{z\in E} p^k(z, x_{n+k}) \cdot \Pi_n(y_{0:n}, z)$$

Exercice 3:

(a) ν est à valeurs dans $\{-2,-1,0,1,2\}$.

$\nu(\{-2\}) \overset{\perp}{=} P(S_0=\cancel{+}1)\, P(\tilde{S}_0=-1) = \frac{1}{9}$.

$\nu(\{-1\}) = \mathbb{P}(S_0=0)\cdot \mathbb{P}(\tilde{S}_0=-1) + \mathbb{P}(S_0=-1)\,\mathbb{P}(\tilde{S}_0=0) = \frac{2}{9}$.

$\nu(\{0\}) = \sum_{i=-1}^{1} \mathbb{P}(S_0=i)\,\mathbb{P}(\tilde{S}_0=i) = 3\times\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

De même, $\nu(\{1\}) = \frac{2}{9}$ et $\nu(\{2\}) = \frac{1}{9}$.

(b) $\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = \mathbb{P}(S_{n+1}-\tilde{S}_{n+1}=j / S_n-\tilde{S}_n=i)$

Comme $S_{n+1}-\tilde{S}_{n+1} = S_{n+1}-\tilde{S}_{n+1} + U_{n+1}-\tilde{U}_{n+1}$, il vient

$p_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1}=j / X_n=i) = \mathbb{P}(U_{n+1}-\tilde{U}_{n+1}=j-i)$

$$\Rightarrow \forall i, \quad p_{i,j} = \begin{cases} p\cdot q & \text{si } j=i-2 \\ p^2+q^2 & \text{si } j=i \\ p\cdot q & \text{si } j=i+2. \end{cases}$$

2 (a) On calcule :

$Q_{i,j} = \mathbb{P}(Y_n=j \mid X_n=i) = \mathbb{P}(V_n-\tilde{V}_n=j / X_n=i)$

$= \mathbb{P}(\varepsilon_n-\tilde{\varepsilon}_n=j-i)$ car $V_n-\tilde{V}_n = X_n+\varepsilon_n-\tilde{\varepsilon}_n$.

$$\Rightarrow Q_{i,j} = \begin{cases} \delta^2 & \text{si } j-i=\mp 2 \\ 2\delta(1-2\delta) & \text{si } j-i=\mp 1 \\ 2\delta^2+(1-2\delta)^2 & \text{si } j-i=0. \end{cases}$$

(b) Calculons :

$$\mathbb{P}(X_0=0 / Y_0=0) = \frac{\mathbb{P}(Y_0=0 \mid X_0=0)\cdot \mathbb{P}(X_0=0)}{\mathbb{P}(Y_0=0)}$$

$$= \frac{Q_{0,0}\cdot \nu(\{0\})}{\sum_{i=-2}^{2} Q_{i,0}\cdot \nu(\{i\})}.$$ On remplace ensuite avec les quantités calculées précédemment.

$$\mathbb{P}(X_{0:n}=y_{0:n} \mid Y_{0:n}=y_{0:n}) = \underbrace{\mathbb{P}(Y_n=y_n \mid X_{0:n}=y_{0:n}, Y_{0:n-1}=y_{0:n-1})}_{Q(y_n,y_n)} \times \frac{\mathbb{P}(X_{0:n}=y_{0:n}, Y_{0:n-1}=y_{0:n-1})}{\mathbb{P}(Y_{0:n}=y_{0:n})}$$

$$\mathbb{P}(X_{0:n}=x_{0:n} / Y_{0:n-1}=y_{0:n-1}) = \underbrace{\mathbb{P}(X_n=y_n \mid X_{n-1}=y_{n-1})}_{P(y_{n-1},y_n)} \cdot \mathbb{P}(X_{0:n-1}=y_{0:n-1} / Y_{0:n-1}=y_{0:n-1})\,\mathbb{P}(Y_{0:n-1}=y_{0:n-1})$$

Or $\mathbb{P}(Y_{0:n}=y_{0:n}) = \sum_{z\in E} \mathbb{P}(Y_{0:n}=y_{0:n}, X_n=z) = \sum_z \underbrace{\mathbb{P}(Y_n=y_n / X_n=z)}_{Q(z,y_n)} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_n=z / Y_{0:n-1}=y_{0:n-1})}_{\pi_{n/n-1}(y_{0:n-1},z)} \cdot \mathbb{P}(Y_{0:n-1}=y_{0:n-1})$

En écrivant le rapport des quantités ci-dessus, on trouve :

$$\mathbb{P}(X_{0:n}=y_{0:n} / Y_{0:n}=y_{0:n}) = \frac{Q(y_n,y_n)\,P(y_{n-1},y_n)}{\sum_{z\in E} Q(z,y_n)\,\pi_{n/n-1}(y_{0:n-1},z)} \cdot \mathbb{P}(X_{0:n-1}=y_{0:n-1} / Y_{0:n-1}=y_{0:n-1})$$

On a donc obtenu une formule de récurrence pour le calcul de $\mathbb{P}(X_{0:n}=y_{0:n} / Y_{0:n})$ (en supposant calculées les $\pi_{n/n-1}(y_{0:n-1},z)$). Il suffit ensuite d'initialiser à l'aide de la question précédente.