• Preuve R-M 1 : (en dimension 1)

Par la formule de Taylor :

$$V(X_{n+1}) = V(X_n) + V'(X_n)(X_{n+1}-X_n) + \frac{1}{2}\overbrace{V''(\xi_{n+1})}^{\text{bornée}}(X_{n+1}-X_n)^2,$$

avec $\xi_{n+1} \in [X_n, X_{n+1}]$.

On a $\boxed{X_{n+1}-X_n = -\gamma_{n+1}h(X_n) + \gamma_{n+1}\Delta M_{n+1}.}$

↳ $$V(X_{n+1}) \le V(X_n) - \gamma_{n+1}(V'.h)(X_n) + \gamma_{n+1}V'(X_n)\Delta M_{n+1} + C'\gamma_{n+1}^2(h(X_n))^2 + C'\gamma_{n+1}^2(\Delta M_{n+1})^2.$$

on a utilisé V'' bornée (par une cte. C') et $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[V(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \le V(X_n) - \gamma_{n+1}(V'.h)(X_n) + C'\gamma_{n+1}^2\Big(\overbrace{(h(X_n))^2}^{\le K(1+V(X_n))} + \underbrace{\mathbb{E}[(\Delta M_{n+1})^2|\mathcal{F}_n]}_{\le C(1+V(X_n)) \text{ hyp. Thm.}}\Big)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\underbrace{V(X_{n+1})}_{V_{n+1}}|\mathcal{F}_n] \le V(X_n) - \gamma_{n+1}(V'.h)(X_n) + \tilde{C}\gamma_{n+1}^2(1+V(X_n))$$

$$= \underbrace{V(X_n)}_{V_n}(1+\underbrace{\tilde{C}\gamma_{n+1}^2}_{\alpha_{n+1}}) - \underbrace{\gamma_{n+1}(V'.h)(X_n)}_{U_{n+1}\ge 0} + \underbrace{\tilde{C}\gamma_{n+1}^2}_{\beta_{n+1}}$$

On va appliquer le Lemme Robbins-Siegmund,

car
- $\sum \alpha_n < \infty$, $\sum \beta_n < \infty$ (car $\sum \gamma_n^2 < \infty$)
- (U_n) $\mathcal{F}_n$-prévisible et positif (car $V'.h \ge 0$)
- $V_n \ge 0$

↳ on obtient :
$$\begin{cases} V(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} V_\infty \in L^1 \\ \sup_n \mathbb{E}(V(X_n)) < \infty \\ \sum_n \gamma_n (V'.h)(X_n) < \infty \quad p.s. \end{cases}$$

Le fait que $X_n - X_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$:

$$\mathbb{E}[(X_n-X_{n-1})^2] \le 2\gamma_{n+1}^2\,\mathbb{E}[\underbrace{(h(X_n))^2}_{\le K(1+V(X_n))}] + 2\gamma_{n+1}^2\,\overbrace{\mathbb{E}[(\Delta M_{n+1})^2]}^{\le C(1+\mathbb{E}(V(X_n)))}$$

$$= \tilde{C}\gamma_{n+1}^2(1+\mathbb{E}(V(X_n))) \le C\gamma_{n+1}^2(1+\sup_n \mathbb{E}(V(X_n)))$$

$$\Rightarrow \sum_n \mathbb{E}[(X_n-X_{n-1})^2] < \infty \Rightarrow \sum_n (X_n-X_{n-1})^2 < +\infty \ p.s. \Rightarrow X_n - X_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ p.s.$$