Correction du CC2 de MAS

2013 – 2014

Exercice 1

1) $$D(x) = \mathbb{E}\left[(Y-\hat{Y}^x)^2\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[(Y-\hat{Y}^x)^2 \mathbb{1}_{C_i(x)}(Y)\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[(Y-x_i)^2 \mathbb{1}_{C_i(x)}(Y)\right]$$

car les $C_i(x)$ sont disjoints 2 à 2 et $\mathbb{P}(Y \in \bigcup_i C_i(x)) = 1$ comme Y v.a. continue.

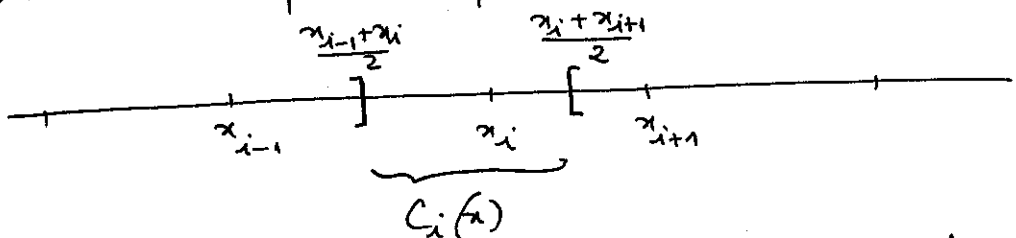
$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{C_i(x)} \underbrace{(y-x_i)^2}_{= \min_{j=1,\dots,N}(y-x_j)^2} f_Y(y)\,dy = \mathbb{E}\left[\min_{j=1,\dots,N}(Y-x_j)^2\right].$$

2) $\min_{i=1,\dots,N}(Y-x_i)^2 \leq (Y-Z)^2$ p.s., $\forall Z$ v.a. à valeurs dans $\{x_1,\dots,x_N\}$

$$\Rightarrow D(x) = \mathbb{E}\left(\min_i (Y-x_i)^2\right) \leq \mathbb{E}\left[(Y-Z)^2\right]$$

$$\Rightarrow \underbrace{D(x^*)}_{= \mathbb{E}\left[(Y-\hat{Y}^{x^*})^2\right]} = \min_{x\in\mathbb{R}^N} \mathbb{E}\left[(Y-\hat{Y}^x)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[(Y-Z)^2\right], \ \forall Z \text{ v.a. de support à au plus } N \text{ points.}$$

et donc $\hat{Y}^{x^*}$ est la meilleure approx. quadratique de Y par une v.a. de support à au plus N points.

3) 

contient les points qui sont les plus proches de x_i que des autres points.

4) On va faire la preuve pour le cas $x_1 < x_2 < \dots < x_N$.

Dans ce cas, les intervalles $C_{i-1}(x)$, $C_i(x)$ et $C_{i+1}(x)$ ont des bornes dépendantes de x_i.

Donc

$$\frac{\partial D}{\partial x_i}(x) = \frac{d}{dx_i}\int_{\frac{x_{i-2}+x_{i-1}}{2}}^{\frac{x_{i-1}+x_i}{2}} (y-x_{i-1})^2 f_Y(y)\,dy + \frac{d}{dx_i}\int_{\frac{x_{i-1}+x_i}{2}}^{\frac{x_i+x_{i+1}}{2}} (y-x_i)^2 f_Y(y)\,dy$$

$$+ \frac{d}{dx_i}\int_{\frac{x_i+x_{i+1}}{2}}^{\frac{x_{i+1}+x_{i+2}}{2}} (y-x_{i+1})^2 f_Y(y)\,dy.$$

Avec la formule de dérivation d'une intégrale à paramètre (comme les fct. à intégrer sont continues) :

- $1^{\text{ère}}$ intégrale $= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2} - x_{i-1}\right)^2 f_Y\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$
- $2^{\text{ème}}$ intégrale $= 2\int_{C_i(x)} (x_i-y) f_Y(y)\,dy + \frac{1}{2}\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2} - x_i\right)^2 f_Y\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2} - x_i\right)^2 f_Y\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right).$$
- $3^{\text{ème}}$ intégrale $= -\frac{1}{2}\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2} - x_{i+1}\right)^2 f_Y\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right).$

$\hookrightarrow \frac{\partial D}{\partial x_i}(x) = 2\int_{C_i(x)} (x_i-y) f_Y(y)\,dy$ (les autres termes se réduisent entre eux).

5) $$\|\nabla D(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial D}{\partial x_i}(x)\right)^2 = 4\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbb{E}\left[(x_i-Y)\mathbb{1}_{C_i(x)}(Y)\right]\right)^2$$

$$\leq 4\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[(x_i-Y)^2\mathbb{1}_{C_i(x)}(Y)\right] \leq 8\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[(\underbrace{x_i^2}_{\leq\|x\|^2}+Y^2)\mathbb{1}_{C_i(x)}(Y)\right]$$

$$\leq 8\left(\|x\|^2 + \mathbb{E}(Y^2)\right).$$

6) a) $X^{k+1} = X^k - \frac{1}{k+1}\nabla D(X^k) + \frac{1}{k+1}\Delta M^{k+1}$,

avec $\Delta M^{k+1} = \nabla D(X^k) - 2\left((X_i^k - Y^{k+1})\mathbb{1}_{C_i(X^k)}(Y^{k+1})\right)_{1\leq i\leq N}.$

Il reste à montrer que ΔM^{k+1} est un accroissement de martingale.

Soit $\mathcal{F}_k = \sigma(X^0,\dots,X^k)$. Les $(Y_k)_k$ sont indép., donc Y_{k+1} est indép. de $\mathcal{F}_k$.

$$\mathbb{E}\left[\Delta M_i^{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial D}{\partial x_i}(X^k) - 2\left(X_i^k - Y^{k+1}\right)\mathbb{1}_{C_i(X^k)}(Y^{k+1}) \,\Big|\, \mathcal{F}_k\right]$$

$$= \frac{\partial D}{\partial x_i}(X^k) - 2\,\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(X_i^k - Y^{k+1}\right)\mathbb{1}_{C_i(X^k)}(Y^{k+1}) \mid \mathcal{F}_k\right]} = \boxed{0.}$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{E}\left[(x_i - Y)\,\mathbb{1}_{C_i(x)}(Y)\right]\Big|_{x_i = X_i^k}$$ car $Y^{k+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_k$, X^k $\mathcal{F}_k$-mesurable

$$\parallel$$

$$\frac{\partial D}{\partial x_i}(X^k)$$

$\hookrightarrow$ accroissement de martingale.

b) • $V \geq 0$, $V \in C^2$, V'' (hessienne) est bornée

• $\nabla V(x) = 2(x - x^*) \Rightarrow \|\nabla V(x)\|^2 = 4\|x - x^*\|^2 = 4\,V(x)$

($\Rightarrow$ la condition $\|\nabla V(x)\|^2 \leq C(1 + V(x))$ est vérifiée)

• $\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = +\infty$ (V coercive)

• $\langle \nabla V(x), \nabla D(x)\rangle = 2\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_i^*)\frac{\partial D}{\partial x_i}(x)$

$= 2\sum_{i=1}^{N}\int_{C_i(x)}(x_i - x_i^*)(x_i - y)\,f_Y(y)\,dy \geq 0$ (hypothèse dans l'énoncé)

• $\|\nabla D(x)\|^2 \leq 8\left(\|x\|^2 + \mathbb{E}(Y^2)\right) \leq 8\Big[\underbrace{\|x - x^*\|^2}_{V(x)} + \|x^*\|^2 + \left(\mathbb{E}(Y^2)\right)\Big]$

$\leq 8\,V(x) + K$.

$\hookrightarrow$ V est une fct. de Lyapounov sous-quadratique pour ∇D.

c) $\nabla D(x^*) = 0$ et x^* l'unique zéro (car l'unique point de min.)

et x^* l'unique zéro de ∇V.

Pour appliquer le Thm. Robbins-Monro 2, il reste à m.q. $\mathbb{E}\left[\|\Delta M^{k+1}\|^2 \mid \mathcal{F}_k\right] \leq C\left(1 + \|X^k - x^*\|^2\right)$,

avec C une constante.

En plus, on a $\gamma_k = \frac{1}{k}$, donc $\sum_k \gamma_k = +\infty$ et $\sum_k \gamma_k^2 < +\infty$.

$$\mathbb{E}\left[\|\Delta M^{k+1}\|^2 / \mathcal{F}_k\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[(\Delta M_i^{k+1})^2 \mid \mathcal{F}_k\right].$$

$$\mathbb{E}\left[(\Delta M_i^{k+1})^2 / \mathcal{F}_k\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial D}{\partial x_i}(X^k) - 2(X_i^k - Y^{k+1})\mathbb{1}_{C_i(X^k)}(Y^{k+1})\right)^2 / \mathcal{F}_k\right]$$

$$\leq 2\left[\left(\frac{\partial D}{\partial x_i}(X^k)\right)^2 + 4\,\underbrace{\mathbb{E}\left[(X_i^k - Y^{k+1})^2 \mathbb{1}_{C_i(X^k)}(Y_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k\right]}\right]$$

$$\leq 2(X_i^k)^2 + 2\,\mathbb{E}\left[(Y^{k+1})^2 \mathbb{1}_{C_i(X^k)}(Y_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k\right]$$

$$\hookrightarrow \mathbb{E}\left[\|\Delta M^{k+1}\|^2 \mid \mathcal{F}_k\right] \leq 2\|\nabla D(X^k)\|^2 + 8\|X^k\|^2 + 8\,\mathbb{E}(Y^2)$$

$$\leq 24\left(\|X^k\|^2 + \mathbb{E}(Y^2)\right) \quad \text{(en utilisant la question 5)}$$

$$\leq 24\left(\underbrace{\|X^k - x^*\|^2}_{V(X^k)} + \|x^*\|^2 + \mathbb{E}(Y^2)\right).$$

↳ les hyp. du Thm. R-M 2 sont vérifiées et donc $X^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x^*$ p.s.

Exercice 2

1) $\left.\begin{array}{l} Q \text{ symétrique} \\ \pi \text{ uniforme} \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_i Q_{ij} = \pi_j Q_{ji}, \ \forall i,j$

$\Rightarrow Q$ réversible $/\pi$ $\Rightarrow \pi$ invariante pour Q.

Comme Q irréd. et apériodique $\Rightarrow$ la chaîne converge vers π grand $n \to \infty$.

$\Downarrow$

récurrente pos.
(car E fini)

2) a) $P_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} P_{ij} = 1 - \sum_{j \neq i} Q_{ij} \min\left(1, \frac{\pi_j}{\pi_i}\right)$.

$\pi_i P_{ij} = \pi_i Q_{ij} \min\left(\frac{\pi_j}{\pi_i}, 1\right) = Q_{ij} \min(\pi_i, \pi_j) = \pi_j P_{ji}$

Q sym.

$\hookrightarrow P$ réversible $/\pi$.

b) si $Q_{ij} > 0 \Rightarrow P_{ij} > 0$

Soit $i \neq j$.
$\Rightarrow$ Comme i, j communiquent avec la matrice Q (car irréd.)

$\Rightarrow$ ils communiquent aussi avec la matrice P

$\hookrightarrow P$ irréductible.

$P_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} Q_{ij} \min\left(1, \frac{\pi_j}{\pi_i}\right)$.

On va m.q. qu'il existe i_0, j_0 t.q. $Q_{i_0 j_0} > 0$ et $\frac{\pi_j}{\pi_i} \neq 1$.

(Par absurd : sinon $\Rightarrow \forall i,j$, on a $Q_{ij} = 0$ ou $\pi_i = \pi_j$.

Mais comme Q irréductible

$\Rightarrow \forall i \neq j, \ \exists i_1, i_2, \dots, i_k$ t.q.

$Q_{i i_1} Q_{i_1 i_2} \dots Q_{i_{k-1} i_k} Q_{i_k j} > 0$

$\Rightarrow \pi_i = \pi_{i_1} = \pi_{i_2} = \dots = \pi_{i_k} = \pi_j$

$\hookrightarrow \pi_i = \pi_j, \ \forall i \neq j \Rightarrow \pi$ uniforme (contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé)

$\hookrightarrow$ on peut trouver i_0, j_0 t.q. $Q_{i_0 j_0} > 0$ et $\pi_j \neq \pi_i$.

↳ soit $\min\left(\frac{\bar\pi_j}{\bar\pi_i}, 1\right) < 1$, soit $\min\left(\frac{\bar\pi_i}{\bar\pi_j}, 1\right) < 1$.

↳ on a trouvé i_0, j_0 t.q. $Q_{i_0 j_0} > 0$ et $\min\left(\frac{\bar\pi_j}{\bar\pi_i}, 1\right) < 1$.

↳ $P_{i_0 i_0} > 1 - \sum_{j \neq i_0} Q_{ij} = Q_{i_0 i_0} \geq 0 \Rightarrow i_0$ apériodique

P irréd.
↳ P apériodique.

c) P réversible $/\bar\pi \Rightarrow \bar\pi$ invariante.

Chaîne irréd. $(\Rightarrow$ réc. pos.$)$, apériodique $\Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \bar\pi$.

d) $P_{ij} = Q_{ij} \cdot \dfrac{\frac{\bar\pi_j}{\bar\pi_i}}{1 + \frac{\bar\pi_j}{\bar\pi_i}} \Rightarrow \bar\pi_i P_{ij} = \dfrac{\bar\pi_i \bar\pi_j Q_{ij}}{\bar\pi_i + \bar\pi_j} = \dfrac{\bar\pi_i \bar\pi_j Q_{ji}}{\bar\pi_i + \bar\pi_j} = \bar\pi_j P_{ji}$

car Q sym.

↳ P réversible $/\bar\pi$. $\Rightarrow \bar\pi$ invariante pour P.

- si $Q_{ij} > 0 \Rightarrow P_{ij} > 0$
  et donc P irréd., car Q irréd.

- $P_{ii} = 1 - \sum_{j\neq i} Q_{ij} \cdot \underbrace{g\left(\frac{\bar\pi_j}{\bar\pi_i}\right)}_{< 1} > 1 - \sum_{j \neq i} Q_{ij} = Q_{ii}$

  ↳ on peut trouver i t.q. $P_{ii} > 0$

  ↳ P apériodique.

↳ $(X_n)_n$ converge en loi vers $\bar\pi$.