Correction Examen MAS2

2012. 2013

Exercice 1:

1. (a) $\mathbb{E}[f(X)] = \int f(x)\, p(x)\, dx$.

$\overset{x=u+\theta}{=} \int f(u+\theta)\, p(u+\theta)\, du$

$= \int f(u+\theta) \dfrac{p(u+\theta)}{p(u)} \cdot p(u) du$ car p strictement positive,

$= \mathbb{E}\left[f(X+\theta) \dfrac{p(X+\theta)}{p(X)} \right]$.

(b) D'après la question 1.(a),

$\mathbb{E}[Y_\theta] = \mathbb{E}[f(X)] \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^d$.

Ainsi, $\mathbb{E}[(Y_\theta^*)^2] \leq \mathbb{E}[Y_\theta^2] \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^d$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}[(Y_\theta^*)^2] - \mathbb{E}[Y_\theta]^2 \leq \mathbb{E}[Y_\theta^2] - \mathbb{E}[Y_\theta]^2$

$\Leftrightarrow \mathrm{Var}(Y_\theta^*) \leq \mathrm{Var}(Y_\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^d$

$\Leftrightarrow \mathrm{Var}(Y_\theta^*) = \min_{\theta \in \mathbb{R}^d} (\mathrm{Var}(Y_\theta))$.

(c) $Q(\theta) = \mathbb{E}[Y_\theta^2] = \mathbb{E}\left[f^2(X+\theta) \dfrac{p^2(X+\theta)}{p^2(X)} \right]$

$= \int f^2(x+\theta) \dfrac{p^2(x+\theta)}{p^2(x)} \cdot p(x)\, dx$

$\overset{u=x+\theta}{=} \int f^2(u) \dfrac{p^2(u)}{p(u-\theta)} du = \int f^2(u-\theta) \dfrac{p(u)}{p(u-\theta)} \cdot p(u) du$

$= \mathbb{E}\left[f^2(X-\theta) \dfrac{p(X)}{p(X-\theta)} \right]$.

2. (a) $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$; $p(x-\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-\theta)^2}{2}\right)$.

$\Rightarrow \dfrac{p(x)}{p(x-\theta)} = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} - \theta x + \dfrac{\theta^2}{2}\right)$

$= \exp\left(\dfrac{\theta^2}{2} - \theta x\right)$.

On déduit alors le résultat demandé de la question 1.(c)

(b) Si Q satisfait aux règles de dérivation, alors

$Q'(\theta) = \mathbb{E}\left[f^2(X)\, \partial_\theta \left(e^{\frac{\theta^2}{2} - \theta X} \right) \right] = \mathbb{E}\left[f^2(X)(\theta - X) e^{\frac{\theta^2}{2} - \theta X} \right]$.

De même,

$Q''(\theta) = \mathbb{E}\left[f^2(X) e^{\frac{\theta^2}{2} - \theta X} \left(1 + (\theta - X)^2\right) \right]$.

(c) On remarque que $Q''(\theta) > 0$. En effet,

$\cdot\ f^2(X)\, e^{\theta^2/2 - \theta X} (1 + (\theta - X)^2) \geq 0$ p.s.

De plus, $\mathbb{P}(f(X) = 0) = 0 \Rightarrow f^2(X) e^{\theta^2/2 - \theta X} (1 + (\theta - X)^2) > 0$ p.s.

$\Rightarrow Q''(\theta) > 0$. Ainsi, Q' est strictement croissante.

Comme de plus, $\lim_{\theta \to +\infty} Q(\theta) = +\infty$ et $\lim_{\theta \to -\infty} Q(\theta) = +\infty$,

il existe un! θ^* tq $\begin{cases} Q'(\theta) < 0 & \text{sur }]-\infty, \theta^*[\\ Q'(\theta) > 0 & \text{sur }]\theta^*, +\infty[. \end{cases}$

θ^* est donc l'unique minimum de Q.

3. (a) $Q'(\theta) = \int f^2(x)\,(\theta - x)\,\dfrac{e^{\frac{\theta^2}{2} - \theta x - \frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$

$\overset{u=x+\theta}{=} \int f^2(u-\theta)(2\theta-u)\, e^{\frac{\theta^2}{2} - \theta(u-\theta) - \frac{(u-\theta)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,du$

$= \int f^2(u-\theta)(2\theta-u)\,\dfrac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,du\; e^{\left(\frac{\theta^2}{2}+\theta^2-\frac{\theta^2}{2}\right)}$

$= e^{\theta^2}\,\mathbb{E}[f^2(X-\theta)(2\theta-X)] = e^{\theta^2} h(\theta).$

Comme $e^{\theta^2} > 0 \ \forall \theta \in \mathbb{R}$, il est clair que

- $Q'(\theta) = 0 \iff h(\theta) = 0$,
- $Q'(\theta) > 0 \iff h(\theta) > 0$ et $Q'(\theta) < 0 \iff h(\theta) < 0$.

(b) Comme f est bornée, $|f^2(X-\theta)(2\theta - X)| \leq C(|X| + |\theta|)$.

$\Rightarrow |h(\theta)| \leqslant C(\underbrace{\mathbb{E}[|X|]}_{<+\infty} + |\theta|) \leqslant \tilde{C}(1+|\theta|)$.

De même,

$(f^2(X-\theta)(2\theta-X))^2 \leqslant C(2\theta - X)^2 \leq \tilde{C}(\theta^2 + X^2)$

car $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)\ \forall a,b \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$\mathbb{E}[(f^2(X-\theta)(2\theta-X))^2] \leqslant \tilde{C}(\theta^2 + \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{<+\infty})$

d'où le résultat.

(e) $h(\theta) = \mathbb{E}[H(X,\theta)]$ avec $H(X,\theta) = f^2(X-\theta)(2\theta - X)$. Ainsi, un algorithme stochastique adapté est :

$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} H(X_{n+1}, \theta_n)$ où

(X_n) est une suite de v.a i.i.d. tq $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ et (γ_n) est une suite $\downarrow$ tq $\sum \gamma_n = +\infty$, $\sum \gamma_n^2 < +\infty$.

(d) On peut réécrire $(\theta_n)_n$ sous la forme :

$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} h(\theta_n) + \gamma_{n+1}\Delta M_{n+1}$

où h est définie précédemment et :

$\Delta M_{n+1} = h(\theta_n) - H(X_{n+1}, \theta_n)$.

ΔM_{n+1} est un accroissement de martingale car $h(\theta_n) = \mathbb{E}[H(X_{n+1},\theta_n)/\mathcal{F}_n]$.

On vérifie les hypothèses de Robbins-Monro 2 avec :

$V(\theta) = (\theta - \theta^*)^2$. V est bien sous quadratique et :

- $(V' \cdot h)(\theta) \geqslant 0$ car V' et h ont même signe.
- $V'h(\theta) = 0 \iff \theta = \theta^*$.

De plus, $\cdot\ |h(\theta)| \leq C(1+|\theta|)$ via la question précédente et :

$\mathbb{E}[|\Delta M_{n+1}|^2/\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[H^2(X_{n+1},\theta_n)/\mathcal{F}_n] - h^2(\theta_n)$

$\leq \mathbb{E}[H^2(X_{n+1},\theta_n)/\mathcal{F}_n] = \Psi(\theta_n)$ avec $\Psi(\theta) = \mathbb{E}[(f^2(X-\theta)(2\theta-X))^2]$

D'après la question précédente, $\Psi(\theta) \leq C(1+\theta^2) \leq \tilde{C}(1+V(\theta))$

Les hypothèses de RM2 sont donc satisfaites. On peut en déduire que $\theta_n \xrightarrow{n\to+\infty} \theta^*$ p.s.