Corrigé Exercice 1

CC2 - Algorithmes et Robotes Stochastiques

Exercice 1 :

1. $V@R_\alpha(X)$ représente le seuil pour lequel la probabilité que la perte dépasse ce seuil est égal à α. $CV@R_\alpha(X)$ est la perte moyenne conditionnée à ce que ce seuil soit dépassé.

2. $f(\theta+h)-f(\theta)= \mathbb{E}[(X-\theta-h)_+] - \mathbb{E}[(X-\theta)_+]$

$= \mathbb{E}[(X-\theta-h)\mathbb{1}_{\{X\geq\theta+h\}}] - \mathbb{E}[(X-\theta)\mathbb{1}_{\{X\geq\theta\}}]$

$= \mathbb{E}[(X-\theta-h)(\mathbb{1}_{\{X\geq\theta\}} - \mathbb{1}_{\{\theta\leq X<\theta+h\}})] - \mathbb{E}[(X-\theta)\mathbb{1}_{\{X\geq\theta\}}]$

$= -h\mathbb{P}(X\geq\theta+h) - \mathbb{E}[(X-\theta)\mathbb{1}_{\{\theta\leq X<\theta+h\}}]$

Comme X est une v.a continue,

$\mathbb{P}(X\geq\theta+h) \xrightarrow{h\to0} \mathbb{P}(X>\theta) \quad (=\mathbb{P}(X\geq\theta))$.

De plus,

$0\leq \mathbb{E}[(X-\theta)\mathbb{1}_{\{\theta\leq X<\theta+h\}}] \leq h\,(F_X(\theta+h)-F_X(\theta))$

(où F_X est la fonction de répartition). On en déduit que

$\frac{f(\theta+h)-f(\theta)}{h} \xrightarrow{h\to0} -\mathbb{P}(X\geq\theta)$.

(car $F_X(\theta+h)-F_X(\theta)\xrightarrow{h\to0}0$).

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(\theta) = -\mathbb{P}(X>\theta) = F_X(\theta)-1.$$

3. Comme f est dérivable et que f' est continue car F_X l'est, on en déduit que Ψ est $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\Psi'(\theta) = 1 - \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{P}(X>\theta) = 1+\frac{1}{1-\alpha}(F_X(\theta)-1)$$

De plus, F_X est dérivable de dérivée continue puisque f_X l'est donc ; Ψ' est $\mathcal{C}_2$ et

$$\Psi''(\theta) = \frac{1}{1-\alpha} f_X(\theta)$$

4. $\frac{\Psi(\theta)}{\theta} = 1 + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\theta}(X-\theta)_+\right]$

$\frac{1}{\theta}(X-\theta)_+ = \left(\frac{X}{\theta}-1\right)\mathbb{1}_{\{X\geq\theta\}} \xrightarrow{p.s.} \begin{cases} -1 & \text{si } \theta\to-\infty \\ 0 & \text{si } \theta\to+\infty \end{cases}$

De plus $\forall\theta\geq1$, $\left|\frac{X}{\theta}-1\right| \leq \frac{|X|}{\theta}+1 \leq |X|+1$.

X est intégrable donc on peut appliquer le théo de convergence dominée pour obtenir $\frac{1}{\theta}\mathbb{E}[(X-\theta)_+] \to \begin{cases} -1 & \text{si } \theta\to-\infty \\ 0 & \text{si } \theta\to+\infty. \end{cases}$

Ainsi $\frac{\Psi(\theta)}{\theta} \xrightarrow{\theta\to-\infty} 1 - \frac{1}{1-\alpha} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}$

et $\frac{\Psi(\theta)}{\theta} \xrightarrow{\theta\to+\infty} 1$

5. Ψ'' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Ψ est strictement convexe.

De plus, $\Psi'(\theta) = 0 \iff \mathbb{P}(X > \theta) = 1-\alpha$
$\iff \mathbb{P}(X \leq \theta) = \alpha \iff \theta = VaR_\alpha(X)$

Ψ admet un unique point critique qui est nécessairement un minimum puisque Ψ est strict. convexe.

6. $\Psi(\theta^*) = \theta^* + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[(X-\theta^*)\mathbb{1}_{\{X \geq \theta^*\}}]$

$= \theta^* + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{X \geq \theta^*\}}] - \theta^*$ car $\mathbb{P}(X > \theta^*) = 1-\alpha$

$= \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{X \geq \theta^*\}}] \times \frac{1}{\mathbb{P}(X \geq \theta^*)} = \mathbb{E}[X / X \geq \theta^*]$

$= CVaR_\alpha(X)$

Partie 2:

$\perp\!\!\!\perp$ de $\mathcal{F}_n$ $\quad$ $\mathcal{F}_n$-mes

1. $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_{n+1} > \theta_n\}} / \mathcal{F}_n] =: g(\theta_n)$

où $g(\theta) = \mathbb{P}(X > \theta)$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\frac{1}{1-\alpha}(1 - \mathbb{1}_{\{X_{n+1} > \theta_n\}}) / \mathcal{F}_n] = \frac{1}{1-\alpha}(1 - g(\theta_n))$

$= h(\theta_n)$ avec $h = \Psi'$

Ainsi,

$\theta_{n+1} = \theta_n + \mathbb{E}[\Delta\theta_{n+1} | \mathcal{F}_n] + \Delta\theta_{n+1} - \mathbb{E}[\Delta\theta_{n+1} / \mathcal{F}_n]$

$= \theta_n - \gamma_{n+1} h(\theta_n) + \gamma_{n+1} \Delta M_{n+1}$

où $\Delta M_{n+1} = h(\theta_n) - \frac{1}{1-\alpha}(1 - \mathbb{1}_{\{X_{n+1} > \theta_n\}})$ et $\gamma_n = \frac{1}{n}$.

2. D'après les questions 4 et 5 de la première partie, $\lim_{\theta \to \pm\infty} \Psi(\theta) = +\infty$, Ψ' et Ψ'' sont bornées (car f_X bornée) $|\Psi'|^2 \leq C(1+\Psi)$. De plus, $\Psi' . h = (\Psi')^2 \geq 0$ et $\{\Psi' . h = 0\} = \{\theta^*\}$. Enfin, $\mathbb{E}[\Delta M_{n+1}^2 / \mathcal{F}_n] \leq C$ car ΔM_{n+1} est borné.

On peut donc en conclure que $\theta_n \to \theta^*$ p-s. en appliquant le théorème de Robbins Monro.

3. $C_n - CVaR_\alpha = C_n - \Psi(\theta^*)$

$= C_n - \mathbb{E}[v(\theta^*, X)]$

$= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(v(\theta_k, X_k) - v(\theta^*, X_k))}_{①} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v(\theta^*, X_k) - \mathbb{E}[v(\theta^*, X)]}_{②}$

①: Comme $x \to \max(x, 0)$ est Lipschitzienne, on en déduit (par composition) que $\theta \to v(\theta, y)$ l'est aussi et que la constante de Lipschitz ne dépend pas de y car $\forall y$, $\theta \to -\theta + y$ est lipschitzienne de constante 1. Ainsi

① $\leq C . \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\theta_k - \theta^*| \xrightarrow[p\text{-}s.]{n \to +\infty} 0$

car $\theta_k \to \theta^*$ et le lemme de Cesaro.

② $\mathbb{E}[|v(\theta^*, X)|] < +\infty$ d'où ② $\to 0$ par la LGN.

En conclusion $C_n \xrightarrow{n \to +\infty} CVaR_\alpha$ p-s.