Contrôle de Modèles et algorithmes stochastiques 1 et 2

Durée 2h00

Les documents (autres que les notes de cours), les calculatrices et les téléphones portables sont interdits. Le barème est approximatif.

Exercice 1 (Approximation récursive de la $CV@R$) (12 points)

Soit X une variable aléatoire intégrable quantifiant la perte de valeur d'un portefeuille entre un temps t et un temps $t+\Delta_t$. On appelle alors "Value At Risk" et on note $V@R_\alpha(X)$ la quantité définie par :

$$V@R_\alpha(X) = \inf\{t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \le t) \ge \alpha\}.$$

Il s'agit donc du quantile d'ordre α associé à la variable X (α est dans la pratique proche de 1 : 95 %, 99 %,...). On suppose dans la suite que X est une variable aléatoire intégrable admettant une densité f_X continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$.
On définit alors la "Conditional Value At Risk" associée à $V@R_\alpha(X)$ par :

$$CV@R_\alpha(X) = \mathbb{E}[X | X \ge V@R_\alpha(X)].$$

$V@R_\alpha(X)$ et $CV@R_\alpha(X)$ sont des indicateurs pour évaluer le risque du marché. On les appelle mesures de risque. On désire dans cet exercice de construire un algorithme pour approcher simultanément $V@R$ et $CV@R$.

Partie 1.

1. Donner une interprétation (rapide) de la $V@R$ et de la $CV@R$.
2. On pose $f(\theta) = \mathbb{E}[(X-\theta)_+] = \mathbb{E}[\max(X-\theta, 0)]$. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $h \ge 0$,
$$f(\theta+h) - f(\theta) = -h\mathbb{P}(X \ge \theta + h) - \mathbb{E}[(X-\theta)1_{\{\theta \le X < \theta+h\}}].$$
En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(\theta) = -\mathbb{P}(X > \theta)$.
3. On pose
$$\psi(\theta) = \theta + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[(X-\theta)_+].$$
Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner ψ' et ψ''.
4. Montrer que
$$\frac{\psi(\theta)}{\theta} \to \begin{cases} -\frac{\alpha}{1-\alpha} & \text{lorsque } \theta \to -\infty \\ 1 & \text{lorsque } \theta \to +\infty. \end{cases}$$
5. Montrer que ψ est strictement convexe et admet un unique minimum θ^*. Montrer que $\theta^* = V@R_\alpha(X)$.
6. Montrer que $\psi(\theta^*) = CV@R_\alpha$.

Partie 2.

1. On considère l'algorithme stochastique $(\theta_n)_{n\ge 0}$ défini par
$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}\mathbf{1}_{\{X_{n+1} > \theta_n\}}\right)$$
où (X_n) est une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X. Ecrire l'algorithme sous la forme $\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1}h(X_n) + \gamma_{n+1}\Delta M_{n+1}$ en précisant γ_{n+1}, h et ΔM_{n+1} (On pourra vérifier que $h = \psi'$).
2. Montrer que $\theta_n \to \theta^*$ $p.s$ (On pourra utiliser la fonction ψ comme fonction de Lyapounov).

3. On note $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X et on définit C_n par
$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v(\theta_{k-1}, X_k) \quad \text{où } v(\theta, y) = \theta + \frac{1}{1-\alpha}(y-\theta)_+.$$
En utilisant la loi des grands nombres, montrer que (C_n) converge *p.s.* vers $CV@R_\alpha(X)$ (On pourra admettre que la fonction $x \mapsto \max(x, 0)$ est Lipschitzienne).

Exercice 2 (Modèle d'Ehrenfest perturbé) (8 points (+ 1,5 points pour la question Bonus))

On considère la variante suivante du modèle d'Ehrenfest. Soit $0 < p \leq 1$. On répartit initialement $2N$ boules dans deux urnes A et B. À chaque pas de temps, on choisit de façon équiprobable une boule parmi les $2N$. Une fois la boule choisie, on la change d'urne avec probabilité p, et avec probabilité $1-p$ on la laisse dans l'urne dans laquelle elle se trouvait. Pour tout $n \geq 0$ on note X_n le nombre de boules dans l'urne A à l'étape n.

Notons que le modèle d'Ehrenfest classique s'obtient comme cas particulier pour $p = 1$.

1. Donner la matrice de transition Q_p de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que la chaîne $(X_n)_n$ est irréductible pour tout $0 < p \leq 1$.
3. Montrer que la chaîne $(X_n)_n$ est apériodique si $0 < p < 1$.
4. Montrer que la matrice de transition Q_p est réversible par rapport à une mesure de probabilité que l'on précisera.
5. Montrer que, pour n'importe quelle loi initiale $\mathcal{L}(X_0)$, la chaîne $(X_n)_n$ converge en loi quand $n \to \infty$. Donner la loi limite μ.
6. Pour $k, m = 0, \ldots, 2N$, on note $T_m = \inf\{n \geq 1 : X_n = m\}$ et $t_k(m) = \mathbb{E}_k(T_m)$.
   Donner $t_m(m)$ pour $m = 0, \ldots, 2N$. Déterminer ensuite une relation de récurrence reliant $t_k(m)$, $t_{k-1}(m)$ et $t_{k+1}(m)$, pour $1 \leq k < m-1$. Traiter aussi les cas $k = 0$ et $k = m-1$.

   N.B. Il ne vous est pas demandé de résoudre les relations de récurrence obtenues.
7. Soit $\beta_p = 1 - \frac{p}{N}$. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a
$$\mathbb{E}(X_n) = N + (\mathbb{E}(X_0) - N)\beta_p^n.$$
8. (*Bonus*) On admettra le fait que β_p est la deuxième plus grande valeur propre de Q_p en valeur absolue, i.e. $\beta_p = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(Q_p),\ \lambda < 1\}$. Montrer que la chaîne $(X_n)_n$ converge en loi vers μ à vitesse exponentielle, dans le sens où pour tout $n \geq 0$:
$$d_{VT}(\mathcal{L}(X_n), \mu) \leq C\beta_p^n,$$
où d_{VT} dénote la distance en variation totale et $C = C(\mu, \mathcal{L}(X_0))$ est une constante, dépendant de μ et de $\mathcal{L}(X_0)$, qu'il faudra préciser.

   Rappel : Si ν et μ sont deux mesures de probabilité sur un espace fini E, alors
$$d_{VT}(\nu, \mu) = \frac{1}{2}\sum_{j\in E} |\nu_j - \mu_j|.$$