Correction feuille de TD 5

2 IMACS, 2011 – 2012

Exc. 1

1) $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$, avec $p = 90\%$,
car $S_n = X_1 + \dots + X_n$, avec $X_i = \begin{cases} 1, & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ passager se présente} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

et les X_i sont indép. car les passagers décident indép. entre eux. et de même loi $\mathrm{Ber}(p)$, avec $p = 90\%$.

(nb. de "succès" dans n expériences indép. de type succès / insuccès, avec la même proba p d'avoir succès à chaque fois)

2) Pour n grand (en général $n \geq 30$; c'est bon donc car ici $n > 300$)

et $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$ (conditions vérifiées dans notre cas)

on a $\mathcal{B}(n, p) \overset{\text{loi}}{\approx} \mathcal{N}(\underbrace{np,\ np(1-p)}_{\text{la même moyenne et variance que la loi binomiale}})$

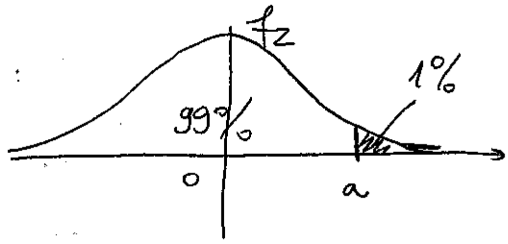
On a donc $S_n \overset{\text{loi}}{\approx} \mathcal{N}(np, np(1-p)) = \mathcal{N}(0{,}9\,n\ ;\ 0{,}09\,n)$.

3) On veut $\mathbb{P}(S_n > 300) < 1\%$; $\underline{n = ?}$

$$\mathbb{P}(S_n > 300) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{\approx \mathcal{N}(0,1)} > \frac{300 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big) \approx \mathbb{P}\Big(Z > \frac{300-np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big)$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

On veut donc $\mathbb{P}\Big(Z > \underbrace{\frac{300-np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{=:a}\Big) \leq 1\%$:



$\Rightarrow F_Z(a) = \mathbb{P}(Z \leq a) \geq 99\%$

$\Rightarrow a \geq 2{,}33$ $\Rightarrow \dfrac{300-np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq 2{,}33$.

avec la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$\frac{300 - 0{,}9\,n}{0{,}3\sqrt{n}} \geqslant 2{,}33$$

On note $\underline{\sqrt{n} = t}$ $\Rightarrow$ $300 - 0{,}9\,t^2 \geqslant 0{,}699\,t$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}3\,t^2 + 0{,}233\,t - 100 \leq 0$$

$$\Delta = (0{,}233)^2 + 4 \cdot 0{,}3 \cdot 100 = 120{,}05$$

$$t_{1,2} = \frac{-0{,}233 \pm 10{,}956}{0{,}6} \;\Big< \begin{array}{l} \sim -18{,}64 \\ \sim 17{,}87 \end{array} \Rightarrow t \in [t_1, t_2]$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{n} \leq 17{,}87 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n \leq 319}$$

Exo. 2 $\quad X_n \sim \mathcal{U}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) \Rightarrow f_{X_n}(x) = \begin{cases} n, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

1) $$\phi_{X_n}(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX_n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{X_n}(x)\,dx = n\int_0^{1/n} e^{itx}\,dx$$

$$= n\left(\int_0^{1/n} \cos(tx)\,dx + i\int_0^{1/n} \sin(tx)\,dx\right)$$

$$= n\left\{\left(\frac{\sin(tx)}{t}\right]_{x=0}^{1/n} - i\left[\frac{\cos(tx)}{t}\right]_{x=0}^{1/n}\right\}$$

$$= n\left\{\frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t} - i\,\frac{\cos\left(\frac{t}{n}\right) - 1}{t}\right\}$$

$$= \frac{n}{t}\left\{\sin\left(\frac{t}{n}\right) + i\left(1 - \cos\left(\frac{t}{n}\right)\right)\right\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(t) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}}}_{=1} + i\,\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}}}_{=0} = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

car

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

Si $X \equiv 0$ alors $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{it0}\right) = 1$, $\forall t$

On a obtenu que $\phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_0(t)$, $\forall t$

$$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Loi}} 0}$$

3) $Y_n = n X_n$.

- on calcule par exemple la fct. caract. de Y_n.

$$\phi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}(e^{itY_n}) = \mathbb{E}(e^{it\frac{1}{n}X_n}) = \phi_{X_n}(\tfrac{t}{n}) = \frac{\sin t}{t} + i\,\frac{1-\cos t}{t}, \quad \forall t.$$

on remarque la fct. caract. de la loi $\mathcal{U}([0,1])$.

(la formule d'avant prise en $n=1$).

↳ $Y_n \sim \mathcal{U}([0,1])$, $\forall n$.

- <u>Une autre méthode</u> : avec la fct. de répartition.

$$F_{Y_n}(t) = \mathbb{P}(Y_n \leq t) = \mathbb{P}(X_n \leq \tfrac{t}{n}) = \dots$$

4) $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$

les Y_i sont indép. (car les X_i le sont)
et de même loi $\mathcal{U}([0,1])$

↳ par la loi des grands nombres, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{2}$.

5) $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(Y_1) + \dots + \mathbb{E}(Y_n) = n \cdot \mathbb{E}(Y_1) = \frac{n}{2}$.

$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(Y_1) + \dots + \mathrm{Var}(Y_n) = n\,\mathrm{Var}(Y_1) = \frac{n}{12}$.

car indép.

6) Par le <u>Thm. limite central</u>

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow[n \text{ grand}]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow \underline{S_n} \underset{n \text{ grand}}{\overset{\text{loi}}{\approx}} \mathcal{N}(\mathbb{E}(S_n), \mathrm{Var}(S_n)) = \underline{\mathcal{N}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{12}\right)}.$$

$\boxed{\text{Exc. 3}}$ $X_n = n \min(U_1, \dots, U_n)$, avec $U_i \sim \mathcal{U}([0,1])$.

1)
$$\begin{aligned}
F_{X_n}(x) &= \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\min(U_1,\dots,U_n) \leq \tfrac{x}{n}\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\min(U_1,\dots,U_n) > \tfrac{x}{n}\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\{U_1 > \tfrac{x}{n}\} \cap \dots \cap \{U_n > \tfrac{x}{n}\}\right)\\
&\overset{\text{indép.}}{=} 1 - \mathbb{P}(U_1 > \tfrac{x}{n}) \dots \mathbb{P}(U_n > \tfrac{x}{n})\\
&= 1 - \left(1 - F_{U_1}\left(\tfrac{x}{n}\right)\right)^n = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, & \text{si } \frac{x}{n} \in [0,1] \\ 0, & \text{si } \frac{x}{n} < 0 \\ 1, & \text{si } \frac{x}{n} > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n, & \text{si } x \in [0,n] \\ 0, & \text{si } x<0 \\ 1, & \text{si } x>n \end{cases}$$

On a utilisé le fait que $F_{U_1}(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x\in[0,1] \\ 0, & \text{si } x<0 \\ 1, & \text{si } x>1 \end{cases}$.

$$\lim_{x\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x<0 \\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right), & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

(car pour $\forall x \geq 0$ fixé, $\exists\, n_0$ t.q. $x\in[0,n]$, $\forall\, n \geq n_0$).

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-x}, & \text{si } x\geq 0. \end{cases}$$

(la fct de répartition de la loi Expo(1))

$\hookrightarrow$ $\underline{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{E}xpo(1).}$

3) $F_{1-U}(x) = \mathbb{P}(1-U\leq x) = \mathbb{P}(U\geq 1-x) = 1-F_U(1-x)$

$$= \begin{cases} 1-(1-x), & \text{si } 1-x\in[0,1] \\ 1, & \text{si } 1-x<0 \\ 0, & \text{si } 1-x>1 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{si } x\in[0,1] \\ 1, & \text{si } x>1 \\ 0, & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$= F_U(x)$, $\forall x \Rightarrow 1-U \sim \mathcal{U}nif([0,1])$.

4) $Y_n = n\left(1-\max(U_1,\dots,U_n)\right) = n\left(1+\min(-U_1,\dots,-U_n)\right)$

$= n \min(1-U_1,\dots,1-U_n)$

Grace à 3) $\Rightarrow$ Y_n a la même loi que X_n

$\Rightarrow Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{E}xpo(1)$.