Correction Feuille de TD 4

2 IMACS, 2011 – 2012

Exc. 1

1) $X = \varepsilon Z$, ε, Z indép. $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\varepsilon)\underbrace{\mathbb{E}(Z)}_{=0} = \boxed{0}$.

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \underbrace{(\mathbb{E}(X))}_{0}^2$, car $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$= \mathbb{E}(\varepsilon^2 Z^2) = \mathbb{E}(Z^2) = \underbrace{\mathrm{Var}(Z)}_{=1} + \underbrace{(\mathbb{E}(Z))}_{0}^2 = \boxed{1}$.

car $\varepsilon^2 = 1$ comme $\varepsilon \in \{\pm 1\}$; car $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathrm{Cov}(X, Z) = \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X)\underbrace{\mathbb{E}(Z)}_{=0} = \mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\varepsilon Z^2)$

$\overset{1}{=} \underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon)}_{=1\times\frac{1}{2} + (-1)\times\frac{1}{2} = 0} \mathbb{E}(Z^2) = \boxed{0}$

1 : car ε, Z^2 indép.

2) $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\varepsilon Z \leq x) = \mathbb{P}(\varepsilon Z \leq x \cap \varepsilon = 1) + \mathbb{P}(\varepsilon Z \leq x \cap \varepsilon = -1)$

$= \mathbb{P}(Z \leq x \cap \varepsilon = 1) + \mathbb{P}(-Z \leq x \cap \varepsilon = -1)$

$\overset{2}{=} \mathbb{P}(Z \leq x) \times \mathbb{P}(\varepsilon = 1) + \mathbb{P}(Z \geq -x) \times \mathbb{P}(\varepsilon = -1)$ $(*)$

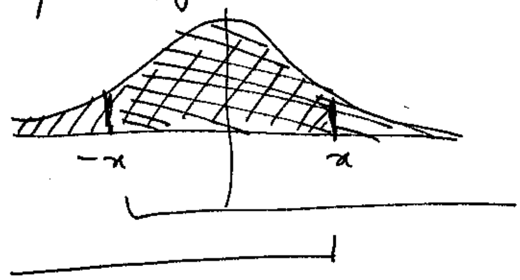
2 : Z et ε indép.

$= \frac{1}{2} F_Z(x) + \left(1 - \mathbb{P}(Z < -x)\right) \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} F_Z(x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} F_Z(-x)$

$= \frac{1}{2}\left[1 + F_Z(x) - F_Z(-x)\right]$.

Rmq : On peut m.q. $\mathbb{P}(Z \geq -x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = F_Z(x)$ par symétrie de la $\mathcal{N}(0,1)$



donc à partir de la ligne $(*)$ on obtient

$F_X(x) = \frac{1}{2} F_Z(x) + \frac{1}{2} F_Z(x)$

$F_X(x) = F_Z(x)$.

donc X suit la même loi $\mathcal{N}(0,1)$ que Z.

3) $\mathbb{P}(Z > 1, X > 1) = \mathbb{P}(Z > 1, \varepsilon = +1) \overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(Z > 1)\mathbb{P}(\varepsilon = +1)$

$= \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z > 1) \neq \mathbb{P}(Z > 1)\mathbb{P}(X > 1)$ car $\mathbb{P}(X > 1) < \frac{1}{2}$ (loi $\mathcal{N}(0,1)$)

Donc X et Z ne sont pas indép.
Ceci est un autre contre-exemple pour m.q.

$$\mathrm{Cov}(X,Z)=0 \not\Rightarrow X, Z \text{ indép}.$$

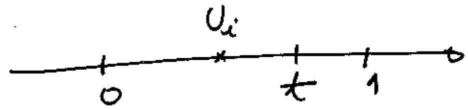
$\boxed{\text{Exc. 2}}$

1) $S = \min(U_1, \dots, U_n)$, $T = \max(U_1, \dots, U_n)$.

2) $Y_t = X_1 + \dots + X_n$, avec $X_i = \begin{cases} 1, & \text{si } U_i \leq t \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

X_i sont toutes indép.
(car les U_i le sont)
et de loi $\mathrm{Ber}(p)$, avec $p = \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(U_i \leq t) = \underline{\underline{t}}$
car $t \in [0,1]$.

$\hookrightarrow Y_t \sim \text{Binomiale}(n, \underline{\underline{t}})$.



3) $\mathbb{P}(S \leq t) = \mathbb{P}(Y_t \geq 1)$
(on a au moins un signal reçu avant l'instant t)

$\Rightarrow \underline{\mathbb{P}(S \leq t)} = 1 - \mathbb{P}(Y_t = 0) = \underline{1 - (1-t)^n}$, $\forall\, t \in [0,1]$.
loi binomiale

$\mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(Y_t = n)$
(tous les n signaux ont été reçu avant l'instant t)

$\Rightarrow \underline{\mathbb{P}(T \leq t) = t^n}$, $\forall\, t \in [0,1]$.

• Rmq : On aurait pu trouver ces probabilités directement, en travaillant avec min et max
(exc. pour les étudiants)

4) On a donc $F_S(t) = \mathbb{P}(S \leq t) = \begin{cases} 1-(1-t)^n, & \text{si } t \in [0,1] \\ 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t > 1 \end{cases}$

$\hookrightarrow f_S(t) = F_S'(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1}, & \text{si } t \in [0,1]. \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{\mathbb{E}(S)} = \int_0^1 t \cdot n(1-t)^{n-1}\,dt = -\int_0^1 t \cdot \left[(1-t)^n\right]' dt$$

$$\overset{(IPP)}{=} \underbrace{-\left[t(1-t)^n\right]_0^1}_{0} + \int_0^1 (1-t)^n\,dt$$

$$= -\left[\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}.$$

$f_T(t) = F_T'(t)$, avec $F_T(t) = \mathbb{P}(T \le t) = \begin{cases} t^n, & \text{si } t \in [0,1] \\ 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t > 1 \end{cases}$

$\Rightarrow f_T(t) = \begin{cases} n t^{n-1}, & t \in [0,1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(T) = \int_0^1 t \cdot n t^{n-1}\,dt = \int_0^1 n t^n\,dt = n \cdot \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{n}{n+1}}$$

On remarque que $\underline{\mathbb{E}(S) + \mathbb{E}(T) = 1}$.

<u>Explication</u> : soit $U_i' = 1 - U_i$; on peut m.q. (facilement) U_i' a la même loi $\mathcal{U}[0,1]$!

$\Rightarrow T' = \max(1-U_1, \dots, 1-U_n)$ a la même loi que T

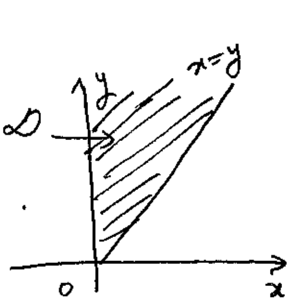
Mais $T' = 1 - \min(U_1, \dots, U_n) = 1 - S$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(T') = 1 - \mathbb{E}(S)$

$\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}(T)}$, car T et T' ont la même loi.

$\boxed{\text{Exc. 3}}$ 1) $f_{X,Y}$ densité de proba sur $\mathbb{R}^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ f_{X,Y} \geq 0 \quad (\text{OK}) \\ \bullet\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1. \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} e^{-y}\,dx\,dy = \int_{y=0}^{\infty}\left(\int_{x=0}^{y} e^{-y}\,dx\right)dy$$

$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y < \infty,\ 0 \le x \le y\}$

$$= \int_{y=0}^{\infty} y e^{-y}\,dy = \boxed{1}$$ (moyenne de Expo(1) ou calcul direct)

$\hookrightarrow f_{X,Y}$ est bien une densité de proba sur $\mathbb{R}^2$.

2) $\mathbb{P}(X<Y) = \iint_{\mathcal{D}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$ ($X \leq Y$ toujours car $(X,Y) \in \mathcal{D}$, et comme X, Y sont continues, $\mathbb{P}(X=Y)=0$, donc $\mathbb{P}(X<Y)=1$.)

$$\mathbb{P}(2X \leq Y) = \mathbb{P}\Big((X,Y) \in \underbrace{\{(x,y) : 0 \leq x \leq \tfrac{y}{2}\}}_{\mathcal{D}'}\Big)$$

$$= \iint_{\mathcal{D}'} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{\infty}\Big(\int_{x=0}^{y/2} e^{-y}\,dx\Big)dy = \int_0^{\infty} \frac{y}{2} e^{-y}\,dy$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

3) Les densités marginales :

• $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \underset{\text{si } x \geq 0}{=} \int_x^{\infty} e^{-y}\,dy = \left[-e^{-y}\right]_x^{\infty} = e^{-x}.$

On a donc $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

↳ $X \sim \text{Expo}(1)$.

• $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \underset{\text{pour } y \geq 0}{=} \int_0^{y} e^{-y}\,dx = \begin{cases} y e^{-y}, & \text{si } y \geq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

• X, Y indép. $\Leftrightarrow$ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$.

Ici $f_X(x) \times f_Y(y) = \begin{cases} y\, e^{-(x+y)}, & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$\neq f_{X,Y}(x,y)$ en général

↳ X, Y ne sont pas indép.

4) $$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-y}}{y e^{-y}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y}, & \text{si } x \in [0,y] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $\underline{y > 0}$.

↳ la loi conditionnelle de X sachant $\{Y=y\}$ est la loi uniforme sur l'intervalle $[0,y]$!

$$\mathbb{E}(X \mid Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{X|Y=y}(x)\, dx = \int_0^y x \cdot \frac{1}{y}\, dx =$$

$$= \frac{1}{y} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y = \boxed{\frac{y}{2}}$$

(le milieu de l'intervalle $[0,y]$, car loi uniforme)

5) $$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = \begin{cases} e^{x-y}, & \text{si } y \geq x \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $\underline{x \geq 0}$.

$$\mathbb{E}(Y \mid X=x) = \int_x^{\infty} y \cdot e^{x-y}\, dy = e^x \int_x^{\infty} y e^{-y}\, dy$$

$$= -e^x \int_x^{\infty} y (e^{-y})'\, dy = -e^x \cdot \left\{ \left[y e^{-y} \right]_x^{\infty} - \int_x^{\infty} e^{-y}\, dy \right\}$$

$$= -e^x \left(-x e^{-x} + \left[e^{-y} \right]_x^{\infty} \right)$$

$$= -e^x \left(-x e^{-x} - e^{-x} \right) = \underline{1 + x}$$

Exc. 4

1) $T = \min(T_1, T_2)$ (car composants montés en série)

2) $F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(\min(T_1,T_2) \leq t) = 1 - \mathbb{P}(\min(T_1,T_2) > t)$

$= 1 - \mathbb{P}(T_1 > t \cap T_2 > t)$

T_1, T_2 indép. $= 1 - \mathbb{P}(T_1 > t) \times \mathbb{P}(T_2 > t)$

car lois exponentielles si $t \geq 0$ $= 1 - e^{-\lambda t} \times e^{-\mu t} = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}, & \forall t \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$\hookrightarrow f_T(t) = \begin{cases} (\lambda+\mu)\, e^{-(\lambda+\mu)t}, & \forall t \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$\hookrightarrow$ $\underline{T \sim \text{Exponentielle}(\lambda+\mu).}$!

(propriété analogue à celle de la loi Géométrique dans le cas discret)

3) $\mathbb{P}(T_1 \leq T_2) = \mathbb{P}((T_1, T_2) \in \mathcal{D})$, avec $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x \geq 0\}$

$$= \iint_{\mathcal{D}} \underbrace{f_{T_1,T_2}(x,y)}_{= f_{T_1}(x)\, f_{T_2}(y) \text{ car } T_1, T_2 \text{ indép.}} \,dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} \,dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} \left(\int_{y=x}^{\infty} \mu e^{-\mu y}\,dy \right) \times \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} e^{-\mu x} \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)x}\,dx$$

$$= \boxed{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}$$

(est la proba que le premier composant tombe en panne avant le 2ème) à comparer avec la même proba pour les lois géométriques.