Correction feuille de TD 3 2011-2012

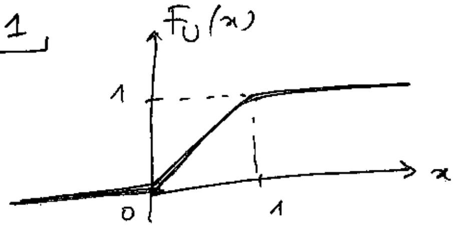
2 IMACS

Exc. 1

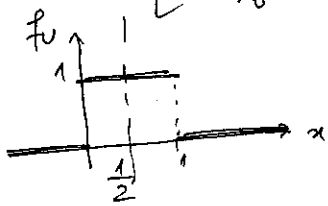
1) $F_U(x) = \mathbb{P}(U \le x) = \mathbb{P}(U \in [0,x]) = x \cdot k$, d'après l'énoncé. $\forall x \in [0,1]$; k : la cte de proportionnalité.

$F_U(1) = \mathbb{P}(U \in [0,1]) = 1 \overset{!}{=} 1 \cdot k \Rightarrow \underline{k = 1}$

$$\Rightarrow F_U(x) = \begin{cases} x, & \forall x \in [0,1] \\ 0, & \text{si } x \le 0 \\ 1, & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$



- $f_U(x) = F_U'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0,1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$ $\longrightarrow$ le terme "uniforme"
- $\mathbb{E}(U) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_U(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$ (attendu, car la densité est symétrique autour de la droite $x = \frac{1}{2}$)



- $\mathrm{Var}(U) = \mathbb{E}(U^2) - (\mathbb{E}(U))^2$

$\mathbb{E}(U^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_U(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \mathrm{Var}(U) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{12}}$

2) $U \sim \mathcal{U}([a,b])$

$F_U(x) = \mathbb{P}(U \le x) = \mathbb{P}(U \in [a,x]) = (x-a) \cdot k$

pour tout $x \in [a,b]$ mais $F_U(b) = 1 = (b-a) \cdot k \Rightarrow k = \frac{1}{b-a}$

$$\Rightarrow F_U(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } x \in [a,b] \\ 0, & \text{si } x \le a \\ 1, & \text{si } x \ge b \end{cases} \Rightarrow f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } x \in [a,b] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathbb{E}(U) = \boxed{\frac{a+b}{2}}$

$\mathbb{E}(U^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(U) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 3b^2 - 6ab}{12}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{12} = \boxed{\frac{(a-b)^2}{12}}$$

Rmq. $\boxed{U \sim \mathcal{U}[0,1] \Leftrightarrow V = a + (b-a)U \sim \mathcal{U}([a,b])}$

car $F_V(x) = \mathbb{P}(a + (b-a)U \le x) = \mathbb{P}\left(U \le \frac{x-a}{b-a}\right) = \frac{x-a}{b-a}$, si $x \in [a,b]$

$\Rightarrow \mathrm{Var}(V) = (b-a)^2 \mathrm{Var}(U)$; $\mathbb{E}(V) = a + (b-a)\mathbb{E}(U)$.

2

3) $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, $\quad X = -\dfrac{\ln(U)}{\lambda}$

On commence par trouver la fct. de répartition de X.

$$F_X(x) = \mathbb{P}\left(-\frac{\ln(U)}{\lambda} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\ln(U) \geq -\lambda x\right) = \mathbb{P}\left(U \geq e^{-\lambda x}\right)$$
$$= 1 - F_U\left(e^{-\lambda x}\right) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } e^{-\lambda x} \in [0,1] \iff x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\underline{X \sim \text{Exponentielle } (\lambda)}$.

$\boxed{\text{Exc. 2}}$ 1) $T \sim \text{Expo}(\lambda) \Rightarrow F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$\mathbb{P}(T < 9697 \text{ min}) \simeq 0{,}02 \Rightarrow 1 - e^{-\lambda \cdot 9697} \simeq 0{,}02$

$\Rightarrow \lambda \simeq -\dfrac{\ln(0{,}98)}{9697} \cong \underline{2 \cdot 10^{-6}}$

$E(T) = \displaystyle\int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$ (faite en cours) $\Rightarrow \underline{E(T)} \simeq \dfrac{10^6}{2} = 5 \times 10^5 \text{ min}$ $\simeq \underline{8333 \text{ h}}$

2) $\mathbb{P}(T \geq t_0) = 0{,}85 \iff e^{-\lambda t_0} = 0{,}85 \Rightarrow \underline{t_0} = -\dfrac{\ln(0{,}85)}{\lambda} \simeq 81259 \text{ min}$ $\simeq \underline{1354 \text{ h}}$

3) $\mathbb{P}(T > t_1 \mid T > t_0) = \dfrac{\mathbb{P}(\{T > t_1\} \cap \{T > t_0\})}{\mathbb{P}(T > t_0)}$

$\left[\begin{array}{l}\text{car } \{T > t_1\} \subset \{T > t_0\} \\ \text{comme } t_0 < t_1\end{array}\right] = \dfrac{\mathbb{P}(T > t_1)}{\mathbb{P}(T > t_0)} = \dfrac{e^{-\lambda t_1}}{e^{-\lambda t_0}} = \underline{e^{-\lambda(t_1 - t_0)}}$

On remarque que

$\mathbb{P}(T > t_1 \mid T > t_0) = \mathbb{P}(T > t_1 - t_0)$ $\rightarrow$ la même que pour un composant neuf de vivre encore $t_1 - t_0$ min.

c'est la propriété "d'absence de mémoire" de la loi Exponentielle, tout comme la loi Géométrique dans le cas discret.

La loi exponentielle est donc adaptée pour modéliser des durées de vie pour des objets moins soumis à l'usure (usure très faible) $\rightarrow$ pour lesquels la "mort" survient brusquement, comme les composants ou appareils électroniques.

$\boxed{\text{Exc. 3}}$ 1) + 2)

$$f_X(-x) = \frac{e^x}{(1+ke^x)^2}$$

$$f_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1+ke^{-x})^2} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\left(1+\frac{k}{e^x}\right)^2} = \frac{1}{e^x \cdot \frac{(k+e^x)^2}{e^{2x}}} = \frac{e^x}{(k+e^x)^2}.$$

Mais f_X densité de probabilité $\Leftrightarrow \begin{cases} \cdot\ f_X \geq 0 \\ \cdot\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1. \end{cases}$

Ici $\cdot\ f_X \geq 0$ OK

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}}{(1+ke^{-x})^2}\,dx = -\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+ke^{-x})'}{(1+ke^{-x})^2}\,dx$$

avec $u(x) = 1+ke^{-x}$

$$= -\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u'(x)}{u^2(x)}\,dx = -\frac{1}{k}\times\left[-\frac{1}{u(x)}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \left[\frac{1}{k(1+ke^{-x})}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{k} \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

$$\Rightarrow f_X(-x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = f_X(x) \Rightarrow f_X \text{ paire}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}_f \text{ symétrique} / Oy.$$

3) $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{1+e^t}\right]_{-\infty}^{x}$$

$$= 1 - \frac{1}{1+e^x} = \boxed{\frac{e^x}{1+e^x}}$$

<u>Rmq</u> : $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

• <u>La médiane</u> : $q_{1/2}$ vérifie $F_X(q_{1/2}) = 1/2$

$$1 - \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+e^x = 2 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$\Rightarrow \boxed{q_{1/2} = 0}$ (prévisible car <u>f_X</u> est <u>symétrique</u> autour de $x=0$)

• $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x f_X(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} x f_X(x)\,dx$, si ces 2 intégrales convergent.

$$\int_0^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} \leq \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x}\,dx \rightarrow \text{convergente}$$

(on la compare par exp., avec $\int_0^{\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x}\,dx < \infty$)

: Mais f_X paire $\Rightarrow x f_X(x)$ impaire

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} x f_X(x)\,dx = -\int_0^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

et comme $\int_0^\infty x f_X(x)\,dx < \infty$, on obtient $\boxed{E(X)=0}$

4) Car f_X symétrique autour de $x=0$!.

Exc. 4 $\quad f_X(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) $f_X(-x) = f_X(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_X$ paire

f_X densité $\Leftrightarrow \begin{cases} \cdot\ f_X \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 0 \\ \cdot\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow c\left[\operatorname{arctg}(x)\right]_{-\infty}^{\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow c \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{1}{\pi}}$$

$\hookrightarrow f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

2) Le moment d'ordre k : $\mathbb{E}(X^k)$, si $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty$.
(intégrale absolument convergente)

$$\mathbb{E}(|X|^k) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f_X(x)\,dx$$

$$\underset{\left[|x|^k f_X(x)\right] \text{ paire}}{=} 2\int_0^\infty x^k \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx$$

• Déjà pour $k \geq 2$: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = +\infty$ car $\dfrac{x^2}{1+x^2} \underset{x\to\infty}{\not\to} 0$

donc X n'admet pas de moment d'ordre $k \geq 2$.

• pour $k=1$: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx \sim \int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx = +\infty$

$\hookrightarrow$ X n'admet ni moment d'ordre 1 (espérance).

Remarque !! Même si f_X est paire (symétrique par rapport à $x=0$),
$\mathbb{E}(X)$ ne vaut pas 0 !
Ceci car $\mathbb{E}(X)$ n'est pas définie (les deux intégrales $\int_{-\infty}^{0} x f_X(x)\,dx$ et $\int_0^\infty x f_X(x)\,dx$ sont $=\infty$)

Exc. 5

1) Soit $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

On a $I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\,dy = \frac{1}{2\pi} \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\,dr\,d\theta$

$= \frac{1}{2\pi} \times 2\pi \times \underbrace{\int_{r=0}^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr}_{\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 1} = \boxed{1} \Rightarrow \underline{\underline{I = 1}}$

en plus, $f_Z \geq 0 \Rightarrow f_Z$ densité de probabilité.

2) f_Z symétrique autour de $x = 0$

$\Rightarrow F_Z(0) = \mathbb{P}(Z \leq 0) = \mathbb{P}(Z \geq 0) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow q_{1/2} = 0$ (la médiane).

Notation classique pour les quantiles de $N(0,1)$: z_α

$z_{1/2} = 0$

- $\underline{\mathbb{E}(Z)} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Z(x)\,dx = \boxed{0}$, car f_Z fct. paire (donc $x f_Z(x)$ impaire)

et $\int_0^{\infty} x f_Z(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \underline{< +\infty}$

On peut même calculer explicitement cette intégrale $\int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 1 < \infty$.

- $Var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\underbrace{\mathbb{E}(Z)}_{0})^2$

$\mathbb{E}(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_Z(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx \overset{(IPP)}{=} -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left[x e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty}}_{0} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

fct paire $\rightsquigarrow$ $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ (car intégrale de la densité sur $\mathbb{R}$)

$\to$ $\underline{Var(Z) = 1}$

3) $\varphi_Z(t) = \mathbb{E}(e^{itZ}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_Z(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Thm. de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre

$\hookrightarrow$ $\varphi_Z'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ix\, e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -\underbrace{\left[e^{itx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{0} + it \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right\}$$

$$= -t \cdot \varphi_Z(t).$$

On obtient que φ_Z est la sol. de l'éq. diff.

$\underline{\varphi_Z'(t) = -t\,\varphi_Z(t)}$, avec $\underline{\varphi_Z(0) = 1}$.

$\hookrightarrow$ $\boxed{\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$, car $\frac{\varphi_Z'(t)}{\varphi_Z(t)} = -t$

$\Rightarrow \ln|\varphi_Z(t)| = -\frac{t^2}{2} + c$

$\Rightarrow \varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot k$

$\varphi_Z(0) = 1 \Rightarrow k = 1$

4) $X \sim N(m, \sigma^2)$

On a $Z = \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0,1)$

(propriété faite en cours)

$\Rightarrow X = m + \sigma Z$, avec $Z \sim N(0,1)$

On en déduit $\mathbb{E}(X) = m + \sigma\,\mathbb{E}(Z) = \boxed{m}$

linéarité de l'espérance

$Var(X) = \sigma^2\, Var(Z) = \boxed{\sigma^2}$

) les deux paramètres de la loi $N(m, \sigma^2)$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}}$ est symétrique autour de $x = m$

$\hookrightarrow$ la médiane $\underline{q_{1/2} = m}$.

$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}\left[e^{it(m+\sigma Z)}\right] = e^{itm} \cdot \mathbb{E}(e^{it\sigma Z}) = e^{itm} \varphi_Z(t\sigma)$

$= \boxed{e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}}$.

$\boxed{\text{Exc. 6}}$ $X \sim N(0,1)$; $Y = X^2$

1) $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = 1 + 0 = \boxed{1}$

2) $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$, si $\underline{y \geq 0}$

$$= \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), & \text{si } y \geq 0 \\ 0, & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

3) On n'a pas d'expression analytique pour F_X, mais en dérivant la relation précédente on obtient

$\underline{f_Y(y)} = F_Y'(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{d}{dy}(\sqrt{y}) - f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{d}{dy}(-\sqrt{y})$, si $y \geq 0$

$$= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

$$\overset{f_X \text{ paire}}{=} f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, & \forall y \geq 0 \\ 0, & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

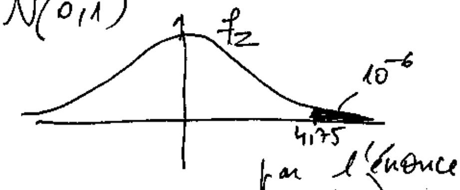
$\boxed{\text{Exc. 7}}$ $X \sim N(m, \sigma^2)$, $m = 75$, $\sigma = 4$.

X_i = le poids de la $i^{\text{ème}}$ personne et de même loi $N(m, \sigma^2)$.
On a que les (X_i) sont indép.
Le poids total : $T = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$\underline{n = ?}$ t.q. $\underline{\mathbb{P}(T > 500) \leq 10^{-6}}$.

Par la prop. de la loi normale, on a $\underline{T \sim N(n \times m, n \times \sigma^2)}$

$$\Rightarrow Z = \frac{T - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0,1)$$



$$\mathbb{P}(T > 500) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{500 - 75n}{4\sqrt{n}}\right) \leq 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{500 - 75n}{4\sqrt{n}} \geq 4{,}75}$$

(car $P(Z > 4{,}75) \overset{\text{par l'énoncé}}{=} 10^{-6}$)

on peut regarder aussi la table de la loi $N(0,1)$ à la fin du poly, mais c'est moins précis (une seule décimale)

$\sqrt{n} = t \Rightarrow 75t^2 + 4 \times 4{,}75\,t - 500 \leq 0$

$\hookrightarrow t \in [t_1, t_2] \rightsquigarrow \boxed{n \leq 6}$ (6 personnes maximum)