Correction TD 2

Exc. 1 $n = 100$, $p = 5\%$ la proba d'annulation

1) $X \sim \mathcal{B}(100, 5\%)$ car les passagers annulent indép. les uns des autres et avec la même proba 5%

[Si on note $X_i = \begin{cases} 1, & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ passager annule} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

les X_i sont toutes de loi $Ber(5\%)$ et indép.

et $X = X_1 + \dots + X_{100}$]

$$\mathbb{P}(X=k) = C_{100}^{k} (0{,}05)^k (0{,}95)^{100-k}$$ ← leur justifier encore une fois la formule

C_{100}^{k} : le nombre de façons de choisir les k passagers qui annulent

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X=0) = (0{,}95)^{100} \\ \mathbb{P}(X=1) = 100 \cdot 0{,}05 \cdot (0{,}95)^{99} \\ \mathbb{P}(X=2) = \dots \end{cases}$$

2) Le nb. moyen d'annulations $= \mathbb{E}(X)$

• 1ère méthode (calcul direct avec la déf) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \times \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k}}_{\parallel} = \boxed{np}$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \underset{k-1=i}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{C_{n-1}^{i} p^i (1-p)^{(n-1)-i}}_{\parallel}$$

$$(p + (1-p))^{n-1} = 1$$

le binôme de Newton

• 2ème méthode : $X = X_1 + \dots + X_n$ avec $X_i \sim Ber(p)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \underbrace{\mathbb{E}(X_1)}_{p} + \dots + \underbrace{\mathbb{E}(X_n)}_{p} = \boxed{np}$$

linéarité de l'espérance

↳ nb. moyen d'annulations $= 100 \cdot 0{,}05 = \boxed{5}$

3) $\mathbb{P}(\text{tous les passagers ont une place}) = \mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X<3)$

$= 1 - \left[\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)\right]$

$= 1 - \left[(1-p)^n + n\,p\,(1-p)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\,p^2(1-p)^{n-2}\right]$

$\left[\mathbb{P}(X=k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}\right]$

$= 1 - \left[(0{,}95)^{100} + 100 \times 0{,}05 \times (0{,}95)^{99} + \frac{100 \cdot 99}{2}(0{,}05)^2 (0{,}95)^{98}\right]$

$=$

$\boxed{\text{Exc. 2}}$

1) $\mathbb{P}(T=1) = p$

$\mathbb{P}(T=2) = (1-p)\cdot p$

$\mathbb{P}(T=3) = (1-p)^2 \cdot p$

(produit car indépendance d'une année à une autre)

On peut appeler $X_i = \begin{cases} 1, & \text{si tombe en panne la } i^{\text{ème}} \text{ année} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$\{T=k\} = \underbrace{\{X_1=0\} \cap \{X_2=0\} \cap \dots \{X_{k-1}=0\} \cap \{X_k=1\}}_{\text{des événements indépendants}}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(T=k) = \underbrace{\mathbb{P}(X_1=0)}_{1-p} \dots \underbrace{\mathbb{P}(X_{k-1}=0)}_{1-p}\, \underbrace{\mathbb{P}(X_k=1)}_{p} = \boxed{p\,(1-p)^{k-1}}$ pour tout $k \geq 1$

$\Rightarrow T \sim \text{Géométrique}(p)$.

2) $\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(T=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,p\,(1-p)^{k-1} = p \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}}$

$= -\frac{d}{dp}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k\right)$

$= -\frac{d}{dp}\left(\frac{1-p}{1-(1-p)}\right)$

$= p \cdot \left(-\frac{d}{dp}\left(\frac{1-p}{p}\right)\right)$

$= p \cdot \frac{1}{p^2} = \boxed{\frac{1}{p}}$

Leur rappeler la série géométrique $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ si $|r|<1$

3) $\mathbb{P}(T>3) = \mathbb{P}(T=4)+\mathbb{P}(T=5)+\dots = p(1-p)^3\Big[\underbrace{1+(1-p)+(1-p)^2+\dots}_{=\frac{1}{1-(1-p)}=\frac{1}{p}}\Big] = \underline{(1-p)^3}$

$\underline{\mathbb{P}(T>k)} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(T=k)$

$= \sum_{i=k+1}^{\infty} p(1-p)^{\cancel{k}\,i-1} = p(1-p)^k\Big[\underbrace{1+(1-p)+(1-p)^2+\dots}_{\frac{1}{p}}\Big] = \underline{(1-p)^k}.$

4) $\mathbb{P}(T>5 \mid T>2) = \dfrac{\mathbb{P}(\{T>5\}\cap\{T>2\})}{\mathbb{P}(T>2)} = \dfrac{\mathbb{P}(T>5)}{\mathbb{P}(T>2)} = \dfrac{(1-p)^5}{(1-p)^2}$

$= \underline{(1-p)^3}$

5) On remarque que $\mathbb{P}(T>5 \mid T>2) = \mathbb{P}(T>3)$.

Plus généralement, $\mathbb{P}(T>k+l \mid T>k) = \mathbb{P}(T>l)$.

↳ propriété d'absence de mémoire de la loi géométrique

"il n'y a pas d'usure"

Cette loi peut modéliser les durées de vie pour des appareils éléctroniques ou pour des objets pour lesquels l'usure est très faible et la "mort" intervient brusquement.

$\boxed{\text{Exc. 3}}$

$\mathbb{P}(T=1) = 0$

$\mathbb{P}(T=2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(T=3) = \mathbb{P}(X_2=0)\,\mathbb{P}(X_3=1)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3-1}{3} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X_n=1) = \frac{n-1}{n}$

avec $X_n = \begin{cases} 1, & \text{si tombe en panne la même année} \\ 0 & \end{cases}$

$\mathbb{P}(X_n=0) = 1-\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$

$\underline{\mathbb{P}(T=k)} = \mathbb{P}(X_2=0)\,\mathbb{P}(X_3=0)\dots\mathbb{P}(X_{k-1}=0)\,\mathbb{P}(X_k=1)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\dots\frac{1}{k-1}\cdot\frac{k-1}{k} = \underbrace{\frac{k-1}{k!}}_{} = \underbrace{\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}}_{}$

$\underline{\text{pour } k\geq 2}$

$\sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{P}(T=k) = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right) = \frac{1}{1!} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 1.$

↑ série télescopique

2) $$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=2}^{\infty} k\, \mathbb{P}(T=k) = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = \boxed{e} \simeq 2,71$$

[Rappel : la série exponentielle $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$]

Exo. 4

1) $T = \min(T_1, T_2)$

2) $$\mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(\{T_1 > k\} \cap \{T_2 > k\})$$

indép. $$= \mathbb{P}(T_1 > k)\, \mathbb{P}(T_2 > k)$$

Exo. 2 $$= (1-p)^k (1-p')^k = \left((1-p)(1-p')\right)^k = \left(1-(p+p'-pp')\right)^k$$

3) $$\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{P}(T > k-1) - \mathbb{P}(T > k)$$ ← ! très important à insister

$$= \left((1-p)(1-p')\right)^{k-1} - \left((1-p)(1-p')\right)^k$$

$$= \left((1-p)(1-p')\right)^{k-1} \left(1 - (1-p)(1-p')\right)$$

$$= \left(1-(p+p'-pp')\right)^{k-1} (p+p'-pp')$$

On reconnaît que $\underline{T \sim \text{Géométrique}(p+p'-pp')}$

[On aurait pu dire directement en utilisant la question 2)

$$\mathbb{P}(T > k) = \left(1-(p+p'-pp')\right)^k = \mathbb{P}(X > k)$$

avec $X \sim$ Géométrique$(p+p'-pp')$

$\Rightarrow F_T = F_X$ (les fct. de répartition)

$\Rightarrow T$ a la même loi que X

4) $$\mathbb{P}(T_1 \le T_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_1 \le T_2,\ T_1 = k)$$ ← décomposition suivant la partition $\{T_1 = k\}_{k \geq 1}$

question très importante aussi

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_2 \geq k,\ T_1 = k)$$

T_1 et T_2 indép.

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_2 \geq k)\, \mathbb{P}(T_1 = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_2 > k-1)\, \mathbb{P}(T_1 = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p')^{k-1} \times p(1-p)^{k-1}$$

$$= p \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p)(1-p')\right)^{k-1}}_{= \frac{1}{1-[(1-p)(1-p')]}} = \boxed{\frac{p}{p+p'-pp'}}$$

$\boxed{\text{Exc. 5}}$ $X \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$, $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

1) $Z = XY$; Z peut prendre les valeurs $0, 1, -1$.

$$Z \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(Z=-1) = \mathbb{P}(X=1, Y=-1) \underset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

2) $\mathbb{E}(Z) = (-1)\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} = \boxed{0}$.

$\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = 0$ aussi, car $\mathbb{E}(Y) = 1\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = 0$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, comme prévu, car X, Y indép. et $Z = XY$.

3) $\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \underbrace{[\mathbb{E}(Z)]^2}_{0} = (-1)^2\cdot\frac{1}{4} + 0^2\cdot\frac{1}{2} + 1^2\cdot\frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

4) $\mathrm{Cov}(X,Z) = \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X)\underbrace{\mathbb{E}(Z)}_{=0} = \mathbb{E}(X^2Y) \underset{\text{car } X, Y \text{ indép.}}{=} \mathbb{E}(X^2)\underbrace{\mathbb{E}(Y)}_{=0} = \underline{0}$.

5) $\mathbb{P}(X=0, Z=0) \underset{\text{car } \{X=0\} \subset \{Z=0\}}{=} \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$,

alors que $\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Z=0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=0, Z=0) \neq \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Z=0) \Rightarrow$ <u>X, Z ne sont pas indép.</u>

Rmq. X, Y indép. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

$\boxed{\text{Exc. 6}}$ 1) $Y_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $Y_i \sim$ Bernoulli (p)

2) $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_X$, dans le sens où,

pour tout $\omega \in \Omega$,

$$Y(\omega) = Y_1(\omega) + \dots + Y_{X(\omega)}(\omega).$$

le nb. d'oeufs pondus observé

3) Sachant $\{X = j\}$, la loi conditionnelle de Y est la loi Binomiale (j, p).

En effet,

$$\mathbb{P}(Y = k \mid X = j) = \frac{\mathbb{P}(Y = k \cap X = j)}{\mathbb{P}(X = j)} = \frac{\mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_j = k, X = j)}{\mathbb{P}(X = j)}$$

car indép. entre les Y_i et X

$$= \frac{\mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_j = k)\,\cancel{\mathbb{P}(X = j)}}{\cancel{\mathbb{P}(X = j)}} = \mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_j = k)$$

Mais $Y_1 + \dots + Y_j \sim$ Binomiale (j, p) car somme de Bernoulli indép.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y = k \mid X = j) = C_j^k p^k (1-p)^{j-k}, \text{ pour tout } \underline{\underline{0 \le k \le j}}$$

4) $$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k \mid X = j)\, \mathbb{P}(X = j)$$

formule des probas totales avec la partition $\{X = j\}_{j \ge 0}$

$$= \sum_{\underline{\underline{j=k}}}^{\infty} C_j^k p^k (1-p)^{j-k} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\cancel{j!}}{k!(j-k)!} p^k (1-p)^{j-k} \frac{\lambda^j}{\cancel{j!}} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{j-k}}{(j-k)!}$$

$i = j-k$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!}}_{= e^{\lambda(1-p)}} = \boxed{\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}}, \ \underline{\forall k \ge 0}$$

$\hookrightarrow$ Y suit la loi de $\underline{\text{Poisson } (\lambda p)}$.

Exc. 7 $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$, $k \geq 0$; $\mathbb{P}(Y=\ell) = \frac{\lambda^\ell}{\ell!} e^{-\lambda}$, $\ell \geq 0$

1) $\mathbb{P}(S=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) \underset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) = e^{-\mu} \cdot e^{-\lambda} = e^{-(\mu+\lambda)}$.

$$\mathbb{P}(S=1) = \mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=0) = \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0)$$
$$= e^{-\mu} \cdot \lambda e^{-\lambda} + \mu e^{-\mu} e^{-\lambda} = (\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)}.$$

$$\mathbb{P}(S=k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i, Y=k-i) \underset{\text{indép.}}{=} \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu} \times \frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda}$$
$$= \frac{1}{k!} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i \mu^i \lambda^{k-i} \right)}_{= (\mu+\lambda)^k} e^{-(\mu+\lambda)} = \boxed{\frac{(\mu+\lambda)^k}{k!} e^{-(\mu+\lambda)}}$$

← binôme de Newton $\forall k \geq 0$

↳ $S \sim$ Poisson $(\mu+\lambda)$

Rmq. $\mathbb{E}(S) = \mu + \lambda = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

2) $$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$
$$= e^{-\mu} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\mu)^k}{k!}}_{= \exp\{e^{it}\mu\}} = e^{-\mu + e^{it}\mu} = \boxed{e^{\mu(e^{it}-1)}}$$
$\forall t \in \mathbb{R}$

Pareil $\varphi_Y(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

$\varphi_S(t) = \varphi_{X+Y}(t) \underset{\text{car } X, Y \text{ indép.}}{=} \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = e^{(\mu+\lambda)(e^{it}-1)}$, qui est la fct. caract. de la loi Poisson$(\mu+\lambda)$

↳ $S \sim$ Poisson $(\mu+\lambda)$ car la fct. caract. est unique pour chaque loi.

3) Sachant $\{S=n\}$, X peut prendre les valeurs $0, 1, \dots, n$.

$$\mathbb{P}(X=k \mid S=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k, S=n)}{\mathbb{P}(S=n)} = \frac{\mathbb{P}(X=k, Y=n-k)}{\mathbb{P}(S=n)}$$

$$\overset{X \text{ et } Y \text{ indép.}}{=} \frac{\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(S=n)}$$

$$= \frac{\frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \cdot \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda}}{\frac{(\mu+\lambda)^n}{n!} e^{-(\mu+\lambda)}}$$

$$= C_n^k \cdot \Big(\underbrace{\frac{\mu}{\mu+\lambda}}_{p}\Big)^k \cdot \Big(\underbrace{\frac{\lambda}{\mu+\lambda}}_{1-p}\Big)^{n-k}, \quad \forall\, k = 0, \dots, n.$$

↳ La loi conditionnelle de X sachant $\{S=n\}$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)$.