Correction TD 1

Exercice 1

1) $\mathbb{P}(3 \text{ cartes de trèfle}) = \dfrac{\text{nb. cas favorables}}{\text{nb. cas possibles}}$.

toutes les possibilités sont équiprobables

deux façons de modéliser l'univers Ω

- si on tient compte de l'ordre des 3 cartes :

$$\mathbb{P}(3 \text{ cartes de trèfle}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{A_{13}^3}{A_{52}^3}.$$

Rappel : $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ (arrangements)

est le nombre de façon de choisir et d'arranger k éléments extraits d'un ensemble de n élém.

- si on ignore l'ordre des 3 cartes :

$$\mathbb{P}(3 \text{ cartes de trèfle}) = \frac{C_{13}^3}{C_{52}^3} = \frac{A_{13}^3/3!}{A_{52}^3/3!} = \frac{A_{13}^3}{A_{52}^3}$$

(on obtient la même proba qu'avant)

Rappel : $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ (combinaisons) — le nb. de sous-ensembles de k élém. d'un ensemble de n éléments.

2) $\mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{au moins}\\ \text{2 cartes de}\\ \text{même couleur}\end{array}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{les 3 cartes}\\ \text{de couleurs}\\ \text{différentes}\end{array}\right) = 1 - \dfrac{52 \cdot 39 \cdot 26}{52 \cdot 51 \cdot 50}$

3) $$\mathbb{P}((A, R, \heartsuit)) = \mathbb{P}((A\heartsuit, R\heartsuit, \heartsuit)) + \mathbb{P}((A\heartsuit, R_{\neq\heartsuit}, \heartsuit)) + \mathbb{P}((A_{\neq\heartsuit}, R\heartsuit, \heartsuit)) + \mathbb{P}((A_{\neq\heartsuit}, R_{\neq\heartsuit}, \heartsuit))$$

$$= \frac{1 \cdot 1 \cdot 11}{52 \cdot 51 \cdot 50} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 12}{52 \cdot 51 \cdot 50} + \frac{3 \cdot 1 \cdot 12}{52 \cdot 51 \cdot 50} + \frac{3 \cdot 3 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50}.$$

! On peut calculer ces probabilités aussi en utilisant la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}\big((A\heartsuit, R\heartsuit, \heartsuit)\big) = \mathbb{P}\begin{pmatrix} A\heartsuit \\ \text{en premier}\end{pmatrix} \times \mathbb{P}\left(\begin{matrix} R\heartsuit \\ \text{en} \\ 2\text{ème}\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} A\heartsuit \\ \text{en} \\ \text{premier}\end{matrix}\right) \times \mathbb{P}\left(\begin{matrix} \heartsuit \\ \text{en} \\ 3\text{ème}\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} A\heartsuit \text{ et } R\heartsuit \\ \text{avant}\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{1}{52} \times \frac{1}{51} \times \frac{11}{50}$$, de même pour les autres.

4) $$\mathbb{P}\begin{pmatrix}\text{au moins} \\ \text{un as}\end{pmatrix} = 1 - \mathbb{P}\begin{pmatrix}\text{aucun} \\ \text{as}\end{pmatrix} = 1 - \frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{52 \cdot 51 \cdot 50} = 1 - \frac{A_{48}^3}{A_{52}^3}$$

$$= 1 - \frac{C_{48}^3}{C_{52}^3}.$$

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

$\Omega = \underbrace{\{1, \dots, 365\} \times \dots \times \{1, \dots, 365\}}_{n \text{ fois}}$; $\omega = (j_1, \dots, j_n)$

$\text{Card}(\Omega) = 365^n$

j_i = le jour anniversaire de la $i$ème personne

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix}\text{au moins deux} \\ \text{avec même jour} \\ \text{anniversaire}\end{pmatrix} = 1 - \mathbb{P}\begin{pmatrix}\text{tous nés dans} \\ \text{des jours} \\ \text{différents}\end{pmatrix} = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}, & \text{si } n \le 365 \\[2ex] 1, & \text{si } n \ge 366. \end{cases}$$

<u>Quelques valeurs numériques</u> :
- pour $n = 23 \to$ proba $\approx 0{,}507$
- pour $n = 41 \to$ proba $> 0{,}9$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ On note $\begin{cases} S & \text{l'événement : « il sauve sa vie ».} \\ U_1 & \text{l'événement « il tire la boule de l'urne 1 »} \\ U_2 & \text{— " — 2} \end{cases}$

1) On a $\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = \frac{1}{2}$.

a) On a dans ce cas : $\mathbb{P}(S \mid U_1) = \frac{4}{4} = 1$; $\mathbb{P}(S \mid U_2) = \frac{0}{4} = 0$.

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S \cap U_1) + \mathbb{P}(S \cap U_2) = \underbrace{\mathbb{P}(S \mid U_1) \times \mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(S \mid U_2) \times \mathbb{P}(U_2)}_{\text{la formule des probas totales}}$$

car U_1, U_2 forment une partition de l'univers Ω

$$= 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) On a maintenant $\mathbb{P}(S \mid U_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(S \mid U_2)$.

$$\to \mathbb{P}(S) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

c) On a $\mathbb{P}(S|U_1) = \frac{3}{3} = 1$; $\mathbb{P}(S|U_2) = \frac{1}{5}$.

$\rightarrow \mathbb{P}(S) = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \boxed{\frac{3}{5}}$

2) Il maximise ses chances en mettant une seule boule blanche dans U_1 et toutes les autres boules dans U_2.

$\mathbb{P}(S) = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{10}{7} = \boxed{\frac{5}{7}}$.

(On peut généraliser à n boules blanches, n boules noires)

$\hookrightarrow \mathbb{P}(S) = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{3n-2}{4n-2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{3}{4}$.

Exo. 4

1) A et B indép. $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}$(1er enfant fille et 2ème enfant garçon)

$= \mathbb{P}(\ \ldots\ )\,\mathbb{P}(\ \ldots\ )$

car les naissances sont indép. $= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

Au fait A et B sont indép. car ils dépendent respectivement de la 1ère et deuxième naissance, qui sont indép.

2) $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}$(2ème garçon et même sexe) $= \mathbb{P}$(les 2 sont garçons)

$= \mathbb{P}$(1er garçon) $\times\ \mathbb{P}$(2ème garçon) $= p^2$.

car naissances indép

$\mathbb{P}(B) = p$; $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}((\text{garçon}, \text{garçon})) + \mathbb{P}((\text{fille}, \text{fille}))$

$= p^2 + (1-p)^2$

<u>B et C indép.</u> $\Leftrightarrow \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$

$\Leftrightarrow p^2 = p \times \left(p^2 + (1-p)^2\right) \Big\} \Leftrightarrow p = p^2 + (1-p)^2 \Leftrightarrow p(1-p) = (1-p)^2$

Comme $p \neq 0$. $\Leftrightarrow p = 1-p \Leftrightarrow \boxed{p = \frac{1}{2}}$

car $p \neq 1$

3) $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}\big((\text{fille}, \text{fille})\big) \overset{4}{=} (1-p)^2 = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(A) = 1-p = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(C) = p = \frac{1}{2}$

$\left.\right\} \to \mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C)$

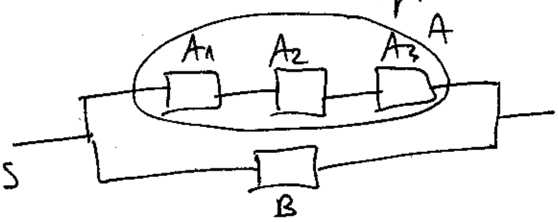
$\to$ A et C sont indépendants.

4) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$ (événement impossible)

mais $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) \neq 0$, donc $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$

$\to$ A ~~et~~, B et C ne sont pas indép. en leur ensemble.

Exercice 5



On a $\mathbb{P}(F_{A_1}) = \mathbb{P}(F_{A_2}) = \mathbb{P}(F_{A_3}) = 0{,}9$

A_1, A_2, A_3 indép.

$\mathbb{P}(F_B \mid F_A) = 0{,}95$

$\mathbb{P}(F_B \mid F_A^c) = 0{,}8$.

- $\mathbb{P}(F_B) = \mathbb{P}(F_B \cap F_A) + \mathbb{P}(F_B \cap F_A^c) = \mathbb{P}(F_B \mid F_A)\times\mathbb{P}(F_A) + \mathbb{P}(F_B \mid F_A^c)\times\mathbb{P}(F_A^c)$

  On a $\mathbb{P}(F_A) = \mathbb{P}(F_{A_1} \cap F_{A_2} \cap F_{A_3}) \underset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(F_{A_1})\,\mathbb{P}(F_{A_2})\,\mathbb{P}(F_{A_3}) = (0{,}9)^3$

  $\hookrightarrow \mathbb{P}(F_B) = 0{,}95 \times (0{,}9)^3 + 0{,}8 \times \left(1 - (0{,}9)^3\right) = \dots$

- $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F_A \cup F_B) = \mathbb{P}(F_A) + \mathbb{P}(F_B) - \mathbb{P}(F_A \cap F_B)$

  $= (0{,}9)^3 + \underset{\text{trouvée avant}}{\mathbb{P}(F_B)} - 0{,}95 \times (0{,}9)^3 = \dots$

- $\mathbb{P}(F_B \mid F) = \dfrac{\mathbb{P}(F_B \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \dfrac{\mathbb{P}(F_B)}{\mathbb{P}(F)}$. $\leftarrow$ car $F_B \subset F$

- $\mathbb{P}(F \cap F_A^c) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(F_A)$, car $F_A \subset F$.

Exercice 6

On note E_i : " on a émis le signal s_i " $\quad i = 1, 2, 3$

R_i : " on a reçu le signal s_i "

1) $$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_2 \cap E_1) + \mathbb{P}(R_2 \cap E_2) + \mathbb{P}(R_2 \cap E_3)$$
$$= \mathbb{P}(R_2 | E_1)\,\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(R_2 | E_2)\,\mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(R_2 | E_3)\,\mathbb{P}(E_3)$$
$$= 0{,}1 \times \frac{1}{3} + 0{,}9 \times \frac{1}{3} + 0{,}08 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}08 \times \frac{1}{3} \neq \boxed{0{,}36}$$

2) $$\mathbb{P}(E_2 | R_2) = \frac{\mathbb{P}(E_2 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{\mathbb{P}(R_2 | E_2)\,\mathbb{P}(E_2)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{0{,}9 \times \frac{1}{3}}{1{,}08 \cdot \frac{1}{3}} =$$
$$= \frac{0{,}9}{1{,}08} \simeq \boxed{0{,}83}$$

3) $$\mathbb{P}(\text{erreur}) = 1 - \mathbb{P}(\text{pas d'erreur})$$
$$= 1 - \left[\mathbb{P}(E_1 \cap R_1) + \mathbb{P}(E_2 \cap R_2) + \mathbb{P}(E_3 \cap R_3) \right]$$
$$= 1 - \left[\mathbb{P}(R_1 | E_1)\,\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(R_2 | E_2)\,\mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(R_3 | E_3)\,\mathbb{P}(E_3) \right]$$
$$= 1 - \left(0{,}8 \times \frac{1}{3} + 0{,}9 \times \frac{1}{3} + 0{,}9 \times \frac{1}{3} \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{3} \times 2{,}6 \simeq \boxed{0{,}13}.$$

4) $$\mathbb{P}(R_2 \cap R_2') \underset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(R_2) \times \underbrace{\mathbb{P}(R_2')}_{= \mathbb{P}(R_2)} = (\mathbb{P}(R_2))^2 = \boxed{(0{,}36)^2} \simeq 0{,}13$$

R_2' : le 2ème signal reçu est s_2