Correction CC2 Proba-Stat

2 IMACS, 2013-2014

Exercice 1

1) $$F_{T_i}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1-e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

2) $$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(T_1 \leq x \cap \dots \cap T_n \leq x)$$
$$= \mathbb{P}(T_1 \leq x) \times \dots \times \mathbb{P}(T_n \leq x) \quad \text{car les } T_i \text{ indép.}$$
$$= \left[F_{T_1}(x)\right]^n = \begin{cases} \left(1-e^{-\lambda x}\right)^n, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_{X_n}(x) = F'_{X_n}(x) = \begin{cases} n\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-1} \cdot \left(1-e^{-\lambda x}\right)' = n\lambda e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-1}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) $$\mathbb{P}(X_n > 3000 \mid X_n > 1000) = \frac{\mathbb{P}(X_n > 3000 \cap X_n > 1000)}{\mathbb{P}(X_n > 1000)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(X_n > 3000)}{\mathbb{P}(X_n > 1000)} = \frac{1-F_{X_n}(3000)}{1-F_{X_n}(1000)} = \frac{1-\left(1-e^{-3000x}\right)^n}{1-\left(1-e^{-1000x}\right)^n}.$$

4) Pour $n=2$ on a $$f_{X_2}(x) = 2\lambda e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right) = \begin{cases} 2\lambda\left(e^{-\lambda x}-e^{-2\lambda x}\right), & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_2) = \int_0^\infty x f_{X_2}(x)\,dx$$
$$= \underbrace{2\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}\,dx}_{2\cdot\frac{1}{\lambda}} - 2\lambda \underbrace{\int_0^\infty x e^{-2\lambda x}\,dx}_{=\frac{1}{2\lambda}} = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \boxed{\frac{3}{2\lambda}}$$

espérance de loi Expo(1) (car espérance de la loi Expo(2λ))

On a $\mathbb{E}(T_i) = \frac{1}{\lambda}$, donc on a bien $\mathbb{E}(X_2) > \mathbb{E}(T_i)$.

5) $$F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}(Y_n \leq y) = \mathbb{P}(X_n - \ln n \leq y) = \mathbb{P}(X_n \leq y + \ln n)$$
$$= F_{X_n}(y+\ln n) = \begin{cases} \left(1-e^{-\lambda(y+\ln n)}\right)^n = \left(1-\frac{e^{-\lambda y}}{n^\lambda}\right)^n, & \text{si } y+\ln n>0 \Leftrightarrow y > -\ln n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6) On étudie la conv. de $F_{Y_n}(y)$.

Pour $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists n_0$ t.q. $y > -\ln n$, $\forall n \geq n_0$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{e^{-\lambda y}}{n^\lambda}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1-\frac{e^{-\lambda y}}{n^\lambda}\right)^{-\frac{n^\lambda}{e^{-\lambda y}}}}_{\downarrow\, e}\Bigg]^{-\frac{e^{-\lambda y}\cdot n}{n^\lambda}}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\left(-e^{-\lambda y}\cdot n^{1-\lambda}\right)}$$

Pour $\boxed{\lambda = 1}$ on a : $\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = e^{-e^{-y}}$, $\forall y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Y_n converge en loi vers une v.a. Y de fct. de répartition $F_Y(y) = e^{-e^{-y}}$, $y \in \mathbb{R}$.

Par contre, pour $\underline{\lambda < 1}$ on a : $F_{Y_n}(y) \longrightarrow 0$
$\underline{\lambda > 1}$ on a : $F_{Y_n}(y) \longrightarrow 1$) ne sont pas des fct. de répartition

donc pour $\lambda \neq 1$ la suite $(Y_n)_n$ ne converge pas en loi.

$\boxed{\text{Exc. 2}}$ 1) a) $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq z\right) = \mathbb{P}(X \leq m+\sigma z)$
$= F_X(m+\sigma z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

b) $f_Z(z) = F_Z'(z) = F_X'(m+\sigma z)\cdot(m+\sigma z)'$
$= f_X(m+\sigma z)\cdot\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$, $\forall z \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Z suit la loi $N(0,1)$.

2) a) $\underset{\text{linéarité}}{\mathbb{E}(\overline{X}_n) =} \frac{\mathbb{E}(X_1)+\ldots+\mathbb{E}(X_n)}{n} = \frac{n\cdot m}{n} = m$ $\Rightarrow$ $\overline{X}_n$ estimateur sans biais pour m.

Par la LGN (comme les (X_i) sont indép., de même loi) on a $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1) = m$, donc $\overline{X}_n$ estimateur consistant.

b) $\overline{X}_n \sim N\left(\mathbb{E}(\overline{X}_n), \mathrm{Var}(\overline{X}_n)\right)$ car somme de v.a. indépendantes de loi normale

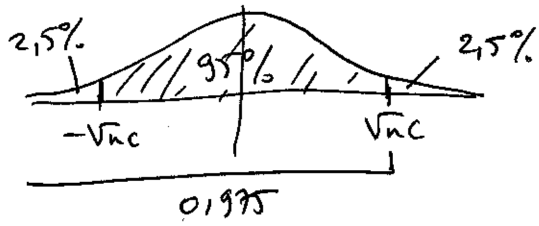
$\underset{\text{indép.}}{\mathrm{Var}(\overline{X}_n) =} \frac{\mathrm{Var}(X_1)+\ldots+\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$ $\Rightarrow$ $\overline{X}_n \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) = \boxed{N\left(m, \frac{1}{n}\right)}$

c) $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(m, \frac{1}{n}) \Rightarrow \dfrac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{n}(\overline{X}_n - m) \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - m| \leq c) = \mathbb{P}(\sqrt{n}|\overline{X}_n - m| \leq \sqrt{n}\, c) = \mathbb{P}(|Z| \leq \sqrt{n}\, c) = 95\%$$

$\Rightarrow \sqrt{n}\, c = 1{,}96$

(car $\mathbb{P}(Z \leq \sqrt{n}\, c) = 95\% + 2{,}5\% = 0{,}975$)



$\hookrightarrow \boxed{c = \dfrac{1{,}96}{\sqrt{n}}}$

$$\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - m| \leq \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\right) = 95\% \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(m \in \left[\overline{X}_n \pm \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\right]\right) = 95\%$$

$\Rightarrow IC_{0{,}95}(m) = \left[\overline{X}_n \pm \dfrac{1{,}96}{\sqrt{n}}\right].$

d) $n = 100$, $\overline{x}_n = 0{,}23 \Rightarrow IC_{0{,}95}(m) = [0{,}23 \pm 0{,}196]$
$= [0{,}034 \; ; 0{,}426]$

On est sûr donc à 95% que $m > 0$, donc que le signal reçu est un signal effectif.

e) Par le TCL, comme les (X_i) sont indép. et de même loi, admettant une variance,

on a $\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{n}(\overline{X}_n - m) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$.

f) On a donc $\mathbb{P}(\sqrt{n}|\overline{X}_n - m| \leq c) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}(|Z| \leq c)$, avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

On trouve c t.q. $\mathbb{P}(|Z| \leq c) = 99\% \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z \leq c) = 0{,}995$

donc $c = 2{,}58$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - m| \leq \overset{d_n}{\frac{2{,}58}{\sqrt{n}}}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 99\%$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(m \in \left[\overline{X}_n \pm \frac{2{,}58}{\sqrt{n}}\right]\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 99\% \Rightarrow IC_{0{,}99}(m) = \left[\overline{X}_n \pm \frac{2{,}58}{\sqrt{n}}\right].$$

g) $n = 100$, $\bar{x}_n = 0{,}23$

$\Rightarrow IC_{0,99}(m) = [0{,}23 \pm 0{,}258] = [-0{,}028 ; 0{,}488]$.

On ne peut donc pas être sûr (à 99% environ) que $m > 0$ $\Rightarrow$ on <u>ne peut pas</u> être sûr (à $\approx$ 99%) qu'il s'agit d'un signal effectif.