Correction du CC2 Proba - Stat

2 IMACS, 2012 - 2013

Exc. 1 $X \sim \text{Expo}(1)$, $Y = \exp\left(\frac{X}{2}\right)$.

1) $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

2) $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{X}{2}\right) \leq y\right) \underset{\text{si } y>0}{=} \mathbb{P}\left(\frac{X}{2} \leq \ln y\right) = \mathbb{P}(X \leq 2\ln y)$

$= F_X(2\ln y)$

$= \begin{cases} 1 - e^{-2\ln y}, & \text{si } \ln y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{y^2}, & \text{si } y \geq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

3) $f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{2}{y^3}, & \text{si } y \geq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

4) $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_1^{\infty} y \cdot \frac{2}{y^3}\, dy = 2\int_1^{\infty} \frac{1}{y^2}\, dy = 2 \cdot \left[-\frac{1}{y}\right]_1^{\infty} = \boxed{2}$ min.

5) $\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2$.

$\mathbb{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\, dy = \int_1^{\infty} y^2 \cdot \frac{2}{y^3}\, dy = 2\int_1^{\infty} \frac{1}{y}\, dy = +\infty$

$\Rightarrow$ Y n'admet pas de variance.

<u>Le moment d'ordre k</u> : $\mathbb{E}(Y^k)$, si il existe.
(si $\mathbb{E}(|Y|^k) < \infty$).

$\mathbb{E}(|Y|^k) = 2\int_1^{\infty} y^k \cdot \frac{2}{y^3}\, dy < \infty$ seulement si <u>$k = 1$</u>.

$\hookrightarrow$ Y admet seulement un moment d'ordre 1 (une espérance).

6) $\mathbb{P}(Y > 20 \mid Y > 10) = \frac{\mathbb{P}(Y > 20 \cap Y > 10)}{\mathbb{P}(Y > 10)} = \frac{\mathbb{P}(Y > 20)}{\mathbb{P}(Y > 10)}$

$= \frac{1 - F_Y(20)}{1 - F_Y(10)} = \frac{\left(\frac{1}{20}\right)^2}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \boxed{\frac{1}{4}} = \underline{0{,}25}$.

$\boxed{\text{Exc. 2}}$

1) $f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0,1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

2) $f(x,y) \underset{\uparrow}{=} f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

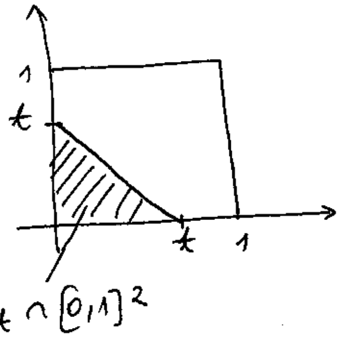
car X, Y indép.

3) $\mathbb{P}((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D \cap [0,1]^2} 1 \cdot dx\, dy = \text{Aire}(D \cap [0,1]^2)$.

4) $F_S(t) = \mathbb{P}(S \le t) = \mathbb{P}(X+Y \le t) = \mathbb{P}((X,Y) \in D_t) = \text{Aire}(D_t \cap [0,1]^2)$

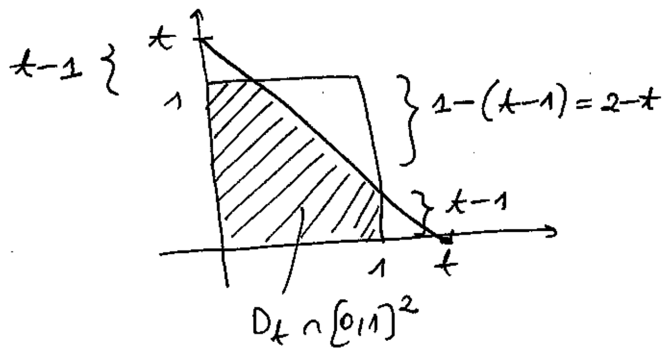
avec $D_t = \{(x,y) : x+y \le t\}$.

Pour $\underline{t \in [0,1]}$:



$\text{Aire}(D_t \cap [0,1]^2) = \frac{t^2}{2}$

Pour $\underline{t \in [1,2]}$:



$\text{Aire}(D_t \cap [0,1]^2) = 1 - \frac{(2-t)^2}{2}$.

Pour $\underline{t < 0}$: $D_t \cap [0,1]^2 = \emptyset$

$\Rightarrow \text{Aire}(D_t \cap [0,1]^2) = 0$

$\underline{t > 2}$: $D_t \cap [0,1]^2 = [0,1]^2 \Rightarrow \text{Aire}(D_t \cap [0,1]^2) = 1$.

d'où $F_S(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ \frac{t^2}{2}, & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 - \frac{(2-t)^2}{2}, & \text{si } t \in [1,2] \\ 1, & \text{si } t > 2 \end{cases}$

5) $f_S(t) = F_S'(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t \in [0,1] \\ 2-t, & \text{si } t \in [1,2] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

6) $\mathbb{E}(S) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_S(t)\, dt = \int_0^1 t^2\, dt + \int_1^2 t(2-t)\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_1^2$

$= \frac{1}{3} + 4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{1}$

ou

$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underbrace{1}$.

$\boxed{\text{Exc. 3}}$

1) Par la LGN, comme les $(X_i)_i$ sont i.i.d. d'espérance m_1, on a $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} m_1$ donc $\overline{X}_n$ est un estimateur consistant de m_1.

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{m_1 + \dots + m_1}{n} = m_1 \Rightarrow \text{estimateur sans biais.}$$

2) $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\Big(\underbrace{m_1}_{\mathbb{E}(\overline{X}_n)}, \underbrace{\frac{64}{n}}_{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}\Big)$, car $\overline{X}_n$ est une combinaison linéaire de v.a. indép. de loi normale.

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) \underset{\text{indép.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{\sigma_1^2}{n} = \frac{64}{n}$$

3) $$Z = \frac{\overline{X}_n - m_1}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathbb{P}(-a < Z < a) = 0{,}95 \Rightarrow \mathbb{P}(Z<a) = 0{,}975 \Rightarrow a = 1{,}96.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-1{,}96 < \frac{\overline{X}_n - m_1}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}} < 1{,}96\right) = 0{,}95$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(m_1 \in \left[\overline{X}_n \pm 1{,}96 \cdot \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right]\right) = 0{,}95.$$

$$\Rightarrow IC_{0,95}(m_1) = \left[\overline{X}_n \pm 1{,}96 \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right].$$

Comme $n = 300$, $\overline{x}_n = 68$, $\sigma_1 = 8$ on trouve un IC observé :

$$IC_{0,95}(m_1) = \left[68 \pm 1{,}96 \times \frac{8}{\sqrt{300}}\right] = [68 \pm 0{,}9053]$$
$$= [67{,}0947 \,;\, 68{,}9053].$$

4) a) $Y \sim \mathcal{N}(15, 5^2)$.

$$\mathbb{P}(Y > 20) = \mathbb{P}\left(\frac{Y-15}{5} > \frac{20-15}{5}\right) = \mathbb{P}(Z > 1) = 1 - F_Z(1)$$
$$= 1 - 0{,}841 = \underline{0{,}159}$$

b) $T = X + Y \sim \mathcal{N}\Big(\underbrace{m_1 + m_2}_{85}, \underbrace{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}_{64+25=89}\Big)$

car somme de v.a. indép. de loi normale

c) $T_{tot} = T_1 + \dots + T_{300}$, avec $T_i \underset{\text{indép.}}{\sim} \mathcal{N}(85, 89) \Rightarrow T_{tot} \sim \mathcal{N}\Big(\overset{25500}{\overbrace{300 \times 85}}; \overset{26700}{\overbrace{300 \times 89}}\Big)$

d) $$\mathbb{P}(T_{tot} > 276200 - 250000) = \mathbb{P}(T_{tot} > 26200) = \mathbb{P}\left(\frac{T_{tot} - 25500}{\sqrt{26700}} > \frac{26200 - 25500}{\sqrt{26700}}\right)$$
$$= \mathbb{P}(Z > 4{,}2839) \cong 1 - F_Z(4{,}284) = 1 - 0{,}999991 = \boxed{0{,}000009}$$

Question BONUS :

→ pour $\underline{n=1}$ on a $\mathbb{P}(S_1 \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t) = t$, si $t \in [0,1]$
donc la formule est vérifiée.

→ On suppose que la formule est vraie pour un certain n,
donc $\underset{F_{S_n}(t) =}{\mathbb{P}(S_n \leq t)} = \dfrac{t^n}{n!}$, $\forall\, t \in [0,1]$.

On va m.q. $\mathbb{P}(S_{n+1} \leq t) = \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$, si $t \in [0,1]$.

$$\mathbb{P}(S_{n+1} \leq t) = \mathbb{P}(S_n + X_{n+1} \leq t) = \mathbb{P}((S_n, X_{n+1}) \in D_t)$$

$$= \iint_{D_t} f_{(S_n, X_{n+1})}(x,y)\, dx\, dy$$

car $f_{S_n}(x) = F'_{S_n}(x)$

S_n et X_{n+1} indép.

$$= \iint_{D_t} f_{S_n}(x) \cdot f_{X_{n+1}}(y)\, dx\, dy = \iint_{D_t} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot 1\, dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{t} \left(\int_{y=0}^{t-x} 1\, dy \right) \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\, dx$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-x) \cdot x^{n-1}\, dx = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ t \cdot \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^t - \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^t \right\}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{t^{n+1}}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1} \right\} = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{si } t \in [0,1].$$

↳ la formule est démontrée, par récurrence, pour tout $n \geq 1$.