Correction CC1 de Probabilités et Statistique

2 IMACS , 2013–2014

$\boxed{\text{Exc. 1}}$ 1) $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A|B)\times\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0{,}25\times 0{,}2}{0{,}5} = \dfrac{0{,}05}{0{,}5} = 0{,}1.$

$\mathbb{P}(B|A) = 0{,}1 \neq \mathbb{P}(B) \Rightarrow$ A et B ne sont pas indép.

(ou $\mathbb{P}(A|B)\neq\mathbb{P}(A)$, ou $\mathbb{P}(A\cap B)\neq \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$).

2) $S = X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(2, \frac{1}{3})$ car somme de v.a. de loi Bernoulli$(\frac{1}{3})$ <u>indépendantes</u>.

Une autre solution (réponse) possible :

$$S \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

car $\mathbb{P}(S=0) = \mathbb{P}(X_1=0 \cap X_2=0) \overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X_1=0)\times\mathbb{P}(X_2=0) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$

$\mathbb{P}(S=2) = \mathbb{P}(X_1=1\cap X_2=1) = \mathbb{P}(X_1=1)\times\mathbb{P}(X_2=1) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$

3) $\mathbb{E}(Z) = (-1)\cdot\frac{1}{2} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$

$\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2$

$\mathbb{E}(Z^2) = (-1)^2\cdot\frac{1}{2} + 0^2\cdot\frac{1}{4} + 1^2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \mathrm{Var}(Z) = \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}.$

$\boxed{\text{Exc. 2}}$ 1) $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \times \mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\cdot p_n = p_0 + t\cdot p_1 + t^2 p_2 + \ldots$

2) $G_X(0) = p_0$

$G_X'(t) = p_1 + 2t\,p_2 + 3t^2 p_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n\, t^{n-1} p_n$

$G_X'(0) = p_1$

$G_X''(t) = 2p_2 + 3\cdot 2\, p_3 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, t^{n-2} p_n$

Par récurrence on obtient

$G_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\, t^{n-k} p_n$

$= k!\, p_k + (k+1)k\ldots 2\, t\, p_{k+1} + \ldots$

$\Rightarrow G_X^{(k)}(0) = k!\, p_k \Rightarrow \quad p_k = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$

3) $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\lambda)^n}{n!}\right)e^{-\lambda} = e^{t\lambda}e^{-\lambda}$

$= \underline{e^{\lambda(t-1)}}.$

$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

$G_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$, $G_X''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$.

Par récurrence on obtient : $G_X^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda(t-1)}$.

$\Rightarrow G_X^{(k)}(0) = \lambda^k e^{-\lambda}$.

$\Rightarrow p_k = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

$\boxed{\text{Exc. 3}}$ 1) $\mathbb{P}(S=n \cap X=k) = \mathbb{P}(Y=n-k \cap X=k) \overset{X,Y \text{ indép.}}{=} \mathbb{P}(Y=n-k) \times \mathbb{P}(X=k)$
$= p(1-p)^{n-k-1} \times p(1-p)^{k-1} = p^2(1-p)^{n-2}$, pour $\underline{1 \leq k \leq n-1}$.

$\mathbb{P}(S=n \mid X=k) = \dfrac{\mathbb{P}(S=n \cap X=k)}{\mathbb{P}(X=k)} = \dfrac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{k-1}} = p(1-p)^{n-k-1}$, pour $\underline{1 \leq k \leq n-1}$.

Pour $k \geq n$: $\mathbb{P}(S=n \cap X=k) = \mathbb{P}(S=n \mid X=k) = 0$.

2) $\mathbb{P}(S=n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(S=n \cap X=k) = \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} =$
$= \underline{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$.

On peut aussi utiliser la formule des probabilités totales :

$\mathbb{P}(S=n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(S=n \mid X=k) \times \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$.

3) $\underline{1^{\text{ère}} \text{ méthode}}$: $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X+Y) \underset{\text{linéarité}}{=} \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{p}$.

$\underline{2^{\text{ème}} \text{ méthode}}$: $\mathbb{E}(S) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n \times \mathbb{P}(S=n) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p^2(1-p)^{n-2} =$
$= p^2 \times \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} \underset{\text{indication}}{=} p^2 \times \dfrac{2}{[1-(1-p)]^3} = \dfrac{2}{p}$.

4) $\mathbb{P}(X=k \mid S=n) = \dfrac{\mathbb{P}(X=k \cap S=n)}{\mathbb{P}(S=n)} = \dfrac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \dfrac{1}{n-1}$, pour $\underline{1 \leq k \leq n-1}$.

Toutes ces probabilités sont égales.

$\underline{\text{Rmq}}$: La loi conditionnelle de X sachant $S=n$ est la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n-1\}$.

1) $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} (x^k)'' = \left(\sum_{k=2}^{\infty} x^k\right)'' = \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right)''$

thm. de dérivation des séries entières

$= \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$.