Correction CC1 Proba-Stat

2IMACS , 2012 – 2013

Exc. 1

1) $\mathbb{P}(X=20) = \left(\frac{1}{2}\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$. (il est allé 20 fois vers la droite)

$\underbrace{\qquad\qquad}_{20 \text{ fois}}$

indép. entre les choix

$\mathbb{P}(X=-20) = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ (il est allé 20 fois vers la gauche)

2) $G \sim \text{Binomiale}\left(20, \frac{1}{2}\right)$ car G peut être vu comme le nb. de succès ("aller vers la gauche") dans une suite de 20 expériences indép. de type succès / insuccès, avec $\frac{1}{2}$ la proba de succès.

On $G = X_1 + \dots + X_{20}$, avec $X_i = \begin{cases} 1, & \text{si il est allé vers la gauche au } i\text{-ème choix} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

avec $X_i \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$ indép.

3) Si $D =$ nb. de fois où il est allé vers la droite on a $D = 20 - G$, et $X = D - G = (20-G) - G = 20 - 2G$.

Comme $X = 20 - 2G \Rightarrow$ la proba que X soit impair est nulle.

4) $\mathbb{P}(X=2k) = \mathbb{P}(20-2G = 2k) = \mathbb{P}(G = 10-k)$
$= C_{20}^{10-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{20-(10-k)} = C_{20}^{10-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}, \ \forall k \in \{0, \dots, 10\}$

$\mathbb{P}(X=-2k) = \mathbb{P}(20-2G = -2k) = \mathbb{P}(G = 10+k)$
$= C_{20}^{10+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = C_{20}^{10-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \mathbb{P}(X=2k)$.

5) $\mathbb{P}(X=0) = C_{20}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{20!}{(10!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$.

6) Comme $\mathbb{P}(X=2k) = \mathbb{P}(X=-2k)$, $\forall k \in \{1, \dots, 10\}$

$\hookrightarrow \mathbb{P}(X>0) = \sum_{k=1}^{10} \mathbb{P}(X=2k) = \sum_{k=1}^{10} \mathbb{P}(X=-2k) = \mathbb{P}(X<0)$.

et $\underbrace{\mathbb{P}(X>0) + \mathbb{P}(X<0)}_{2\mathbb{P}(X>0)} + \mathbb{P}(X=0) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X>0) = \frac{1-\mathbb{P}(X=0)}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X>0) = \frac{1}{2}\left[1 - C_{20}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right]$.

7) $\mathbb{E}(X) = 20 - 2\mathbb{E}(G) = 20 - 2 \times 20 \times \frac{1}{2} = \boxed{0}$

Exc. 2

1) $$\mathbb{P}(X=0)+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=n) = 1-\frac{\lambda p}{1-p} + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}p^n$$
$$= 1-\frac{\lambda p}{1-p} + \lambda p \times \frac{1}{1-p} = \boxed{1}$$

et toutes ces probabilités sont positives, car $p\in]0,1[$

et $0<\lambda<\frac{1-p}{p} \Rightarrow 1-\frac{\lambda p}{1-p}>0$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=0)>0$.

2) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\times\lambda p^n = p\lambda\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1}$$
$$= p\lambda\sum_{n=1}^{\infty}(p^n)' = p\lambda\Big(\sum_{n=1}^{\infty}p^n\Big)' = p\lambda\cdot\Big(\frac{1}{1-p}-1\Big)'$$
$$= p\lambda\cdot\frac{1}{(1-p)^2} = \boxed{\frac{p\lambda}{(1-p)^2}}.$$

3) Loi $(Y\,|\,X=n)$ = Binomiale $(n,\frac{1}{2})$,

car chacun des n moustiques lui transmet le paludisme avec proba $\frac{1}{2}$, et indépendamment entre eux.

- $\mathbb{P}(Y=0\,|\,X=0)=1$.
- $\mathbb{P}(Y=0\,|\,X=n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- $$\mathbb{P}(Y=k\,|\,X=n)=\begin{cases} C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{pour } k\le n\\ 0, & \text{pour } k>n\end{cases}$$

5) $$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}(Y=k\,|\,X=n)\times\mathbb{P}(X=n)$$
$$= \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\lambda p^n = \lambda\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{p}{2}\right)^n$$
$$= \frac{\lambda}{k!}\left(\frac{p}{2}\right)^k \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\left(\frac{p}{2}\right)^{n-k}}_{=\frac{k!}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^{k+1}}}$$
(en utilisant l'indication)
$$= \lambda\left(\frac{p}{2}\right)^k\times\frac{2^{k+1}}{(2-p)^{k+1}} = \boxed{\frac{2\lambda}{p}\left(\frac{p}{2-p}\right)^{k+1}} \quad \forall\, k\geq 1.$$

une autre méthode ?

4) bis $$\mathbb{P}(Y=0) = 1-\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(Y=k) = 1-\frac{2\lambda}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{p}{2-p}\right)^{k+1} = 1-\frac{2\lambda}{p}\times\left(\frac{p}{2-p}\right)^2\times\frac{1}{1-\frac{p}{2-p}}$$
car $0<\frac{p}{2-p}<1$
$$= \boxed{1-\frac{\lambda p}{(2-p)(1-p)}}$$

4) $\mathbb{P}(Y=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=0 \mid X=n) \times \mathbb{P}(X=n)$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(Y=0 \mid X=0)}_{1} \times \mathbb{P}(X=0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \lambda p^n$$

$$= 1 - \frac{\lambda p}{1-p} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{2}\right)^n = 1 - \frac{\lambda p}{1-p} + \lambda \cdot \frac{p}{2} \frac{1}{1-\frac{p}{2}}$$

$$= 1 - \frac{\lambda p}{1-p} + \frac{\lambda p}{2-p} = 1 - \lambda p \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{2-p}\right)$$

$$= 1 - \frac{\lambda p}{(1-p)(2-p)}.$$

5) $\mathbb{P}(X=0 \mid Y=0) = \dfrac{\mathbb{P}(X=0 \cap Y=0)}{\mathbb{P}(Y=0)} = \dfrac{\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(Y=0)}$

$$= \frac{1 - \frac{\lambda p}{1-p}}{1 - \frac{\lambda p}{(1-p)(2-p)}} = \frac{(1-p-\lambda p)(2-p)}{(1-p)(2-p) - \lambda p}.$$

la dérivée k-ième

7) $\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, x^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \left(x^n\right)^{(k)} = \left(\sum_{n=k}^{\infty} x^n\right)^{(k)}.$

On démontre la formule par récurrence sur $k \geq 0$.

- Pour $\underline{k=0}$: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{0!}{(1-x)^{0+1}}$ (OK).
- On suppose que la formule est vraie pour $k-1$, i.e.

$$\left(\sum_{n=k-1}^{\infty} x^n\right)^{(k-1)} = \frac{(k-1)!}{(1-x)^k} \Rightarrow \left(x^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} x^n\right)^{(k-1)} = \frac{(k-1)!}{(1-x)^k}.$$

et on veut la montrer pour k.

En dérivant la relation ci-dessus, on obtient

$$\left(x^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} x^n\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 + \left(\sum_{n=k}^{\infty} x^n\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$ et la formule est démontrée pour k.

$\hookrightarrow$ la formule est vraie pour tout $k \geq 0$.