INSA de Toulouse - 2A IMACS   Mardi 3 juin 2014

Contrôle final de Probabilités et Statistique

Durée 1h30

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Le barème sur 20 est approximatif.

Exercice 1 (8.5 pts)
Pour $n \geq 2$, on considère un système formé de n composants électroniques montés en parallèle. On modelise les durées de vie de ces composants (exprimées en heures) par des variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$ indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$, i.e. de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $X_n = \max(T_1, \ldots, T_n)$ la durée totale de fonctionnement du système.

1. Calculer la fonction de répartition des variables aléatoires T_i.
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X_n, puis montrer que X_n admet comme densité de probabilité:
$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. Sachant que le système a fonctionné déjà pendant 1000 h, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore pendant au moins 2000 h supplémentaires?
4. Pour $n = 2$, calculer la durée moyenne de fonctionnement du système et vérifier qu'elle est plus grande que la durée de vie moyenne de chacun des composants.
5. Pour $n \geq 2$, on pose $Y_n = X_n - \ln n$. Déterminer la fonction de répartition de Y_n.
6. Montrer que la suite de v.a. $(Y_n)_n$ converge en loi quand $n \to +\infty$ vers une variable aléatoire Y et préciser la fonction de répartition F_Y de la loi limite.

Exercice 2 (11.5 pts)

1. Soit $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ et X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, i.e. de densité de probabilité $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   On pose
$$Z = \frac{X - m}{\sigma}.$$

   (a) Exprimer la fonction de répartition F_Z de Z en fonction de la fonction de répartition F_X de X.

   (b) Déterminer f_Z et déduire la loi de Z.

2. Un appareil de télécommunication reçoit un signal stocké à chaque (petit) pas de temps dans une suite de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ supposées indépendantes et de même loi normale de moyenne m et variance 1.

   Cet appareil doit détecter un signal effectif (correspondant à une moyenne m non nulle), en le différenciant d'un bruit (correspondant à une moyenne $m = 0$).

   (a) Montrer que $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ est un estimateur consistant et sans biais pour m.

   (b) Donner la loi de $\bar{X}_n$. (Justifier).

   (c) Pour n fixé, déterminer $c > 0$ tel que

   $$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| \leq c) = 95\%.$$

   En déduire un intervalle de confiance pour m de niveau de confiance 95%.

   (d) *Application numérique*: Calculer cet intervalle de confiance si on suppose que pour une suite de $n = 100$ observations on a obtenu une moyenne empirique $\bar{x}_n = 0.23$.
   Peut-on être sur à 95% que le signal reçu est un signal effectif (pas un bruit)?

   (e) On suppose dans la suite que les X_i ne suivent pas une loi normale, mais une loi quelconque de moyenne m et de variance 1.
   Montrer que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)$ converge en loi quand $n \to \infty$ et préciser la loi limite.

   (f) Déterminer une suite de nombre réels $d_n > 0$ telle que

   $$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| \leq d_n) \longrightarrow 99\% \text{ quand } n \to \infty.$$

   En déduire un intervalle de confiance asymptotique pour m, de niveau de confiance 99%.

   (g) *Application numérique*: Calculer cet intervalle de confiance si on suppose que pour $n = 100$ observations on a obtenu une moyenne empirique $\bar{x}_n = 0.23$.
   Peut-on être sur à (approximativement) 99% que le signal reçu est un signal effectif?

   Indication: Quelques valeurs de la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

   $F_Z(0.99) = 0.84, F_Z(1.65) = 0.95,\ F_Z(1.96) = 0.975,\ F_Z(2.33) = 0.99, F_Z(2.58) = 0.995.$