Contrôle final de Probabilités et Statistique

Durée 1h30

Les documents et les téléphones portables sont interdits.
Les calculatrices type collège sont autorisées.
Le barème sur 20 est approximatif.

Exercice 1 (6 points)

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y = \exp(X/2)$. On suppose que Y modélise le temps d'attente d'un bus (en minutes).

1. Donner la fonction de répartition de X.
2. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
3. Montrer que la variable aléatoire Y admet comme densité de probabilité la fonction
$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y^{-3} & \text{si } y \geq 1, \\ 0 & \text{si } y < 1. \end{cases}$$
4. Calculer le temps moyen d'attente du bus.
5. La variable Y admet-elle une variance ? Pour quelles valeurs de $k \geq 1$, la variable Y admet-elle un moment d'ordre k ?
6. Sachant que l'on a déjà attendu le bus plus de 10 minutes, quelle est la probabilité que le bus n'arrive ni dans les prochains 10 minutes ?

Exercice 2 (6,5 points)

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On veut déterminer la loi de la somme $S = X + Y$.

1. Donner les densités f_X et f_Y des variables aléatoires X et respectivement Y.
2. Donner la densité jointe du couple (X, Y).
3. Montrer que pour tout domaine D du plan on a $\mathbb{P}((X, Y) \in D) = Aire(D \cap [0, 1]^2)$.
4. Montrer que la fonction de répartition de S est donnée par
$$F_S(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{t^2}{2} & \text{si } t \in [0, 1], \\ 1 - \frac{(2-t)^2}{2} & \text{si } t \in [1, 2], \\ 1 & \text{si } t > 2. \end{cases}$$
<u>Indication</u> : Écrire $\mathbb{P}(S \leq t) = \mathbb{P}((X, Y) \in D_t)$, pour un certain domaine D_t qu'il faudra préciser. Vous pourriez aussi dessiner le domaine D_t, dans les différents cas pour t.
5. Déterminer la densité de S.
6. Calculer l'espérance de S de deux façons différentes.

Exercice 3 (7,5 points)

Une compagnie aérienne a demandé des statistiques afin d'améliorer la sûreté au décollage. On admet que le poids d'un passager est modélisé par une variable aléatoire X de loi normale de moyenne inconnue m_1 et d'écart-type $\sigma_1 = 8$ kg, et que les poids des différents passagers sont indépendantes entre eux. Pour estimer le poids moyen m_1 des passagers, on s'intéresse à la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ des poids $X_1, ..., X_n$ de n passagers choisis au hasard.

1. Montrer que $\bar{X}_n$ est un estimateur consistant et sans biais de m_1.
2. Quelle loi suit $\bar{X}_n$? (Justifier.)
3. Sur un échantillon de $n = 300$ passagers qui ont accepté d'être pesés, on obtient une moyenne $\bar{x}_n = 68$ kg. Déterminer un intervalle de confiance au niveau 95% pour le poids moyen m_1 des passagers. (Justifier les étapes de construction de l'intervalle de confiance.)
4. On considère dans la suite que le poids moyen des passagers est $m_1 = 70$ kg. On modélise ensuite le poids des bagages d'un passager par une variable aléatoire Y de loi normale de moyenne $m_2 = 15$ kg et d'écart-type $\sigma_2 = 5$ kg. On suppose que le poids d'un passager est indépendant du poids de ses bagages.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(Y > 20)$.
   (b) Soit T le poids total d'un passager avec ses bagages. Quelle loi suit T ? (Justifier.)
   (c) Supposant qu'il y ait 300 passagers dans l'avion, quelle est la loi du poids total des passagers avec leurs bagages ?
   (d) Le décollage est interdit si le poids total de l'avion dépasse 276200 kg. L'avion pèse, à vide, 250000 kg. Quelle est la probabilité pour que le décollage soit interdit ?

Indication : Quelques valeurs de la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$:

$$F_Z(1) = 0.841; \quad F_Z(1.96) = 0.975; \quad F_Z(4.284) = 0.999991.$$

Question BONUS (suite de l'Exercice 2)

Soit $X_1, X_2, ...$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Pour tout $n \geq 1$ on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = \frac{t^n}{n!}.$$