Contrôle de Probabilités et Statistique

Durée 1h

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Le barème est approximatif.

Exercice 1 (5 pts.) Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0.5$, $\mathbb{P}(B) = 0.2$ et $\mathbb{P}(A|B) = 0.25$. Calculer $\mathbb{P}(B|A)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? (Justifier.)
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/3$. Donner la loi de $S = X_1 + X_2$.
3. Soit Z une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(Z = -1) = 1/2$, $\mathbb{P}(Z = 0) = 1/4$ et $\mathbb{P}(Z = 1) = 1/4$. Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 2 (7 pts.)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$.
Soit G_X la fonction définie pour tout $t \in [-1, 1]$ par

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X).$$

1. Donner l'expression de $G_X(t)$ en fonction des probabilités $p_k, k \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $G_X(0), G'_X(0)$ et montrer ensuite que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a
$$\frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} = p_k,$$
où $G_X^{(k)}$ dénote la dérivée k-ème de la fonction G_X.
3. On suppose dans la suite que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que
$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer la dérivée k-ème $G_X^{(k)}$ et retrouver le fait que $p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Exercice 3 (8 pts.)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On rappelle que $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, pour tout $k \geq 1$, et que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.

On note $S = X + Y$.

1. Soit $n \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(S = n \cap X = k)$, puis $\mathbb{P}(S = n|X = k)$, pour tout $k \geq 1$. (Discuter suivant les valeurs de k.)
2. Pour tout $n \geq 2$, montrer que $\mathbb{P}(S = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$.
3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
Indication : Si besoin, vous pouvez admettre et utiliser le résultat suivant :
$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)r^{k-2} = \frac{2}{(1-r)^3}, \text{ pour } r \in]-1, 1[.$$
4. Soit $n \geq 2$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $S = n$, i.e. les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(X = k|S = n)$, en précisant les valeurs k possibles.
Que remarque-t-on si on compare ces probabilités pour les différentes valeurs de k possibles ?
5. Question BONUS : Démontrer la formule donnée dans l'indication de la question 3.