Contrôle de Probabilités et Statistique

Durée 1h

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 (9 points)
Un ivrogne se trouve au pied d'un réverbère dans une avenue bordée d'une file de réverbères. Il repère les deux réverbères de chaque côté de lui, et choisit de se diriger vers celui de droite avec probabilité $1/2$, vers celui de gauche avec probabilité $1/2$. Arrivé à un réverbère, il choisit le réverbère suivant avec les mêmes probabilités, indépendamment des choix précédents, etc.

Après 20 choix, soit X la variable aléatoire égale à la distance entre l'ivrogne et son point de départ, l'unité de longueur étant la distance entre deux réverbères. On considère la distance négative si il se trouve à gauche du point de départ, et positive si il se trouve à droite du point de départ. On note G le nombre de fois quand il s'est déplacé vers le réverbère de gauche.

1. Donner $\mathbb{P}(X = 20)$ et $\mathbb{P}(X = -20)$.
2. Quelle loi suit G ? Justifier.
3. Montrer que $X = 20 - 2G$. Quelle est la probabilité que X soit un nombre impair ?
4. Déduire $\mathbb{P}(X = 2k)$ et $\mathbb{P}(X = -2k)$, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$.
5. Quelle est la probabilité qu'à la fin l'ivrogne se retrouve au point de départ ?
6. Montrer que $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X < 0) = (1 - \mathbb{P}(X = 0))/2$, puis en déduire $\mathbb{P}(X > 0)$.
7. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 2 (11 points)
Joe passe une nuit de vacances en Afrique et, malgré les conseils des médecins, il dort sans avoir de moustiquaire pour protéger son lit. Malgré tout, il prend quand même soin de bien fermer portes et fenêtres de sa chambre avant de dormir, emprisonnant un nombre aléatoire X de moustiques. On suppose que la loi de X est définie par :

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \frac{\lambda p}{1 - p}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \lambda p^k, \quad \text{si } k = 1, 2, 3, \dots,$$

où p et λ sont des constantes réelles vérifiant $p \in]0, 1[$ et $0 < \lambda < (1 - p)/p$.

Pendant la nuit, chacun des moustiques emprisonnés dans la chambre piquera Joe, mais ne lui transmettra le paludisme qu'avec probabilité $1/2$, et ce indépendamment des autres moustiques.

On note Y le nombre de moustiques qui transmettent le paludisme à Joe.

1. Vérifier que l'ensemble des probabilités ci-dessus définit bien une loi de probabilité.
2. Calculer le nombre moyen de moustiques emprisonnés dans la chambre de Joe.
3. Donner $\mathbb{P}(Y = 0 | X = 0)$. Pour $n \geq 1$ donner $\mathbb{P}(Y = 0 | X = n)$, puis $\mathbb{P}(Y = k | X = n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (discussion sur k). Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$?
4. Déterminer la probabilité pour que Joe passe la nuit sans attraper le paludisme.
5. Sachant que Joe a passé la nuit sans attraper le paludisme, quelle est la probabilité qu'il n'y ait eu aucun moustique dans sa chambre cette nuit là ?
6. Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a
$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{2\lambda}{p} \left(\frac{p}{2 - p} \right)^{k+1}.$$
Indication : Vous pouvez admettre le résultat suivant : pour tout $x \in] - 1, 1[$ et $k \geq 0$,
$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$
7. Question BONUS : Démontrer le résultat énoncé dans l'indication ci-dessus.