

## Contrôle de Probabilités et Statistique

Durée 1h

*Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.*

*Le barème sur 20 est approximatif.*

### Exercice 1 (6,5 points)

On suppose que chaque étudiant de la PO 2IMACS va en cours avec une probabilité 0,5 quand il fait beau et 0,8 quand il pleut, indépendamment des autres étudiants. On considérera qu'il fait beau lorsqu'il ne pleut pas.

On suppose qu'à Toulouse il pleut, en moyenne, 3 jours sur 5 en novembre.

1. Quelle est la probabilité que Paul soit allé en cours le 15 novembre ?
2. Sachant que Paul est allé en cours le 15 novembre, quelle est la probabilité que ce jour là ait été un jour de pluie ?
3. Sur un groupe de 24 étudiants, on note  $N$  le nombre d'étudiants qui étaient présents en cours ce jour là.
  - (a) Quelle loi suit la variable aléatoire  $N$  ? Justifiez votre réponse.
  - (b) Quel est le nombre moyen d'étudiants présents en cours ce jour là ?
  - (c) Déterminez la probabilité que ce jour là ait été un jour de pluie sachant qu'il y avait un seul absent.

### Exercice 2 (7 points)

Pour valider une certaine épreuve de saut en hauteur, un sportif doit réussir deux sauts à la même hauteur de la barre, mais pas forcément à des essais consécutifs. On considère que la hauteur de la barre est fixée en début d'épreuve et on suppose qu'à chaque essai il a une probabilité  $p$  de réussir le saut, indépendamment d'un essai à un autre. On note  $N$  la variable aléatoire qui représente le nombre d'essais que le sportif fait pour valider l'épreuve.

1. Calculez  $\mathbb{P}(N = 2)$ ,  $\mathbb{P}(N = 3)$  et  $\mathbb{P}(N = 4)$ .
2. Déterminez  $\mathbb{P}(N = k)$ , pour tout  $k \geq 2$ .
3. Vérifiez que la somme des probabilités trouvées à la question précédente vaut 1.
4. Calculez le nombre moyen d'essais que le sportif fait pour valider l'épreuve.

*Indication* : Vous pourriez éventuellement écrire  $T$  comme la somme de deux variables aléatoires.

### Exercice 3 (6,5 points)

On casse un bout de bois de longueur 1 en choisissant uniformément au hasard le point de rupture, et l'on note  $U$  la longueur du morceau gauche. On suppose donc que la variable aléatoire  $U$  suit une loi uniforme sur l'intervalle  $]0, 1[$ , de densité  $f_U(x) = 1$  si  $x \in ]0, 1[$  et 0 sinon.

On note  $X = \frac{U}{1-U}$  le rapport des longueurs des deux morceaux.

1. Calculez la fonction de répartition  $F_U$  de  $U$ .
2. Déterminez la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$ .
3. Montrez que la densité de probabilité de  $X$  est donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. La variable aléatoire  $X$  admet-elle une espérance ? Un moment d'ordre 2 ?
5. Quelle est la probabilité que le morceau droit soit au moins deux fois plus long que le morceau gauche ?