Probabilités et Statistique **2011-2012**
Préorientation IMACS 2ème année

Devoir maison

À rendre au plus tard le mardi 24/04

Exercice 1

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$. On appelle *fonction génératrice* de X, notée G_X, la fonction $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$, définie sur l'ensemble des valeurs t pour lesquelles cette espérance existe.
   (a) Donnez l'expression de $G_X(t)$ en fonction des probabilités $p_k, k \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrez que l'ensemble de définition de G_X contient au moins l'intervalle $[-1, 1]$.
   (c) Calculez $G_X(0), G'_X(0)$ et $G''_X(0)$. Proposez une méthode pour retrouver toutes les probabilités p_k si on connaît la fonction génératrice G_X.
   (d) On suppose maintenant que l'ensemble de définition de G_X contient un intervalle de type $[-1, 1 + \varepsilon]$, avec $\varepsilon > 0$. Montrez alors les relations suivantes:
   $$\mathbb{E}(X) = G'_X(1), \quad \mathrm{Var}(X) = G'_X(1) + G''_X(1) - (G'_X(1))^2.$$
   (e) Montrez que si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t), \ \forall t$.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
   (a) Calculez la fonction génératrice G_X et donnez son ensemble de définition.
   (b) Déduisez-en l'espérance et la variance de X.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculez $G_X^{(k)}(0)$ et déduisez-en le fait que $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.
   (d) Déterminez la fonction génératrice de $X + Y$ et déduisez-en sa loi de probabilité.

Exercice 2

Soit T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $X = [T] + 1$ et $Y = T - [T]$, avec $[x]$ qui dénote la partie entière du réel x.

1. Pour $y \in [0, 1[$, calculez la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(T \leq y \mid T < 1)$.

2. Pour tout $k \geq 1$, exprimez l'événement $\{X = k\}$ à l'aide de la variable aléatoire T et déterminez ensuite $\mathbb{P}(X = k)$. Montrez que X suit une loi géométrique et précisez de quel paramètre.

3. Soit $y \in [0, 1[$. Calculez $\mathbb{P}(\{Y \leq y\} \cap \{X = k\})$ pour tout $k \geq 1$.

4. Déduisez-en la fonction de répartition de la variable aléatoire Y. Comparez avec la probabilité trouvée à la première question.

5. Déterminez la densité de probabilité de Y et calculez son espérance et sa variance.