Correction CC 1 de Proba-Stat

2 IMACS , 2011 – 2012

$\boxed{\text{Exc. 1}}$

On note P : " il pleut "
C : " il va en cours "

On a $\mathbb{P}(C \mid P^c) = 0{,}5$; $\mathbb{P}(C \mid P) = 0{,}8$.

$\mathbb{P}(P) = \frac{3}{5}$

1) $$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \mid P) \times \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(C \mid P^c) \times \mathbb{P}(P^c)$$
$$= 0{,}8 \times \frac{3}{5} + 0{,}5 \times \frac{2}{5} = \frac{3{,}4}{5} = \boxed{0{,}68}.$$

2) $$\mathbb{P}(P \mid C) = \frac{\mathbb{P}(P \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(C \mid P) \times \mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{0{,}8 \times \frac{3}{\cancel{5}}}{\frac{3{,}4}{\cancel{5}}} = \frac{2{,}4}{3{,}4} = \boxed{\frac{12}{17}}$$

3) a) $\text{Loi}(N \mid P) = \text{Binomiale}(24 ; 0{,}8)$
$\text{Loi}(N \mid P^c) = \text{Binomiale}(24 ; 0{,}5)$

$$\mathbb{P}(N=k) = \mathbb{P}(N=k \mid P) \times \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(N=k \mid P^c) \times \mathbb{P}(P^c)$$
$$= C_{24}^{k} (0{,}8)^k (1-0{,}8)^{24-k} \times \frac{3}{5} + C_{24}^{k} (0{,}5)^k (0{,}5)^{24-k} \times \frac{2}{5}$$
$$= C_{24}^{k} \cdot \frac{1}{5} \left\{ 3 (0{,}8)^k (0{,}2)^{24-k} + 2 \cdot (0{,}5)^{24} \right\}, \text{ pour } k = 0, \dots, 24.$$

b) $\mathbb{E}(N) = 24 \times 0{,}68 = \underline{16{,}32}$ (car $N = X_1 + \dots + X_{24}$, avec $X_i \sim \text{Ber}(0{,}68)$
donc $\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_{24}) = 24 \times 0{,}68$)

c) $$\mathbb{P}(P \mid N=23) = \frac{\mathbb{P}(N=23 \mid P) \times \mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(N=23)} = \frac{24 \cdot (0{,}8)^{23} \cdot 0{,}2 \times \frac{3}{5}}{24 \cdot \frac{1}{5} \left[3 \cdot (0{,}8)^{23} \cdot 0{,}2 + 2 (0{,}5)^{24} \right]}$$

$$\mathbb{P}(N=23 \mid P) = 24 \cdot (0{,}8)^{23} \cdot 0{,}2$$

$$= \frac{3 \cdot (0{,}8)^{23} \cdot 0{,}2}{3 \cdot (0{,}8)^{23} \cdot 0{,}2 + 2 (0{,}5)^{24}}.$$

R_i : " il réussit le $i^{\text{ème}}$ saut "

$\boxed{\text{Exc. 2}}$ 1) $$\mathbb{P}(N=2) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) \underset{\text{indép. des sauts}}{=} \mathbb{P}(R_1)\, \mathbb{P}(R_2) = p^2.$$

$$\mathbb{P}(N=3) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2^c \cap R_3) + \mathbb{P}(R_1^c \cap R_2 \cap R_3)$$
$$= \underbrace{\mathbb{P}(R_1)\, \mathbb{P}(R_2^c) \mathbb{P}(R_3)}_{p(1-p)p} + \underbrace{\mathbb{P}(R_1^c) \mathbb{P}(R_2) \mathbb{P}(R_3)}_{(1-p)pp} = \underline{2(1-p)p^2}$$

$$\mathbb{P}(N=4) = \mathbb{P}(\underline{\underline{R_1}} \cap R_2^c \cap R_3^c \cap R_4) + \mathbb{P}(R_1^c \cap \underline{\underline{R_2}} \cap R_3^c \cap R_4)$$
$$+ \mathbb{P}(R_1^c \cap R_2^c \cap \underline{\underline{R_3}} \cap R_4) = \underline{3(1-p)^2 p^2}.$$

2) $\mathbb{P}(N=k) = \mathbb{P}(\underline{\underline{R_1}} \cap R_2^c \cap \dots \cap R_{k-1}^c \cap R_k) + \mathbb{P}(R_1^c \cap \underline{\underline{R_2}} \cap R_3^c \cap \dots \cap R_{k-1}^c \cap R_k)$

$$+ \dots + \mathbb{P}(R_1^c \cap \dots \cap R_{k-2}^c \cap \underline{\underline{R_{k-1}}} \cap R_k)$$
$$= \underline{(k-1)(1-p)^{k-2} p^2}$$

(parmi les k sauts, il y a exactement 2 sauts réussis et $k-2$ ratés ; les sauts réussis sont le dernier et un autre pour lequel on a $k-1$ positions possibles).

3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-2} p^2 \underset{i=k-1}{=} p^2 \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}$

$$= p \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1} p}_{\text{l'espérance de la loi Géométrique }(p) = \frac{1}{p}} = p \cdot \frac{1}{p} = \boxed{1}.$$

4) • <u>Calcul direct</u> : $\displaystyle\mathbb{E}(N) = \sum_{k=2}^{\infty} k\,\mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} p^2$

$$= p^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d^2}{dp^2}(1-p)^k = p^2 \frac{d^2}{dp^2}\left(\sum_{k=2}^{\infty}(1-p)^k\right)$$
$$= p^2 \cdot \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{1-(1-p)} - 1 - (1-p)\right)$$
$$= p^2 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)'' = p^2 \cdot \frac{2}{p^3} = \boxed{\frac{2}{p}}.$$

• <u>2ème méthode</u> : $T = T_1 + T_2$

T_1 = l'instant quand il réussit son premier saut

T_2 = le nb. d'essais qu'il fait <u>ensuite</u> pour réussir son 2ème saut.

T_1 et T_2 sont indép. (car les sauts sont indép.) et de même loi géométrique (p)

$$\Rightarrow \mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T_2) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \boxed{\frac{2}{p}}.$$

pas besoin de l'indép.

$\boxed{\text{Exc. 3}}$ 1) $F_U(x) = \mathbb{P}(U \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_U(t)\,dt =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 1 \\ \int_0^x 1\,dt = x, & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

2) $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}\left(\frac{U}{1-U} \le x\right) = \mathbb{P}(U \le x - xU)$

$$= \mathbb{P}((1+x)U \le x) = \begin{cases} \mathbb{P}\left(U \le \frac{x}{1+x}\right), & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

$U \in]0,1[\Rightarrow X > 0$

$$= \begin{cases} F_U\left(\frac{x}{1+x}\right), & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\frac{x}{1+x} \in [0,1]$

$$= \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3) $f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & \text{si } x > 0. \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

4) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^2}\,dx \sim \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x}\,dx = +\infty$

$\hookrightarrow$ X n'admet pas une espérance.

$\rightarrow$ X n'admet ni variance.

$$\left(\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x)^2}\, dx = +\infty \right.$$

car $\frac{x^2}{(1+x)^2} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1 \neq 0$.

5) $$\mathbb{P}(1-U \geq 2U) = \mathbb{P}\left(\frac{U}{1-U} \leq \frac{1}{2} \right) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$= F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

$$\left(= \mathbb{P}\left(U \leq \frac{1}{3} \right) \right)$$