INSA TOULOUSE 17 juin 2010
STPI 2ème Année MIC-IMACS

Examen final de Probabilités et Statistiques

Les calculatrices graphiques, téléphones portables et documents sont interdits. Les calculatrices type collège sont autorisées.

Le barème est approximatif.
Durée de l'épreuve : 1h30

Exercice 1 (5 pts)

1. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{c\,e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Déterminez la constante c pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ (dite densité logistique).

2. Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité de probabilité. Calculez sa fonction de répartition $F_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Quelle est la médiane de X, c'est-à-dire pour quelle valeur x la fonction de répartition est-elle égale à $1/2$? Pouvait-on prévoir ce résultat sans faire de calculs ?

Exercice 2 (8 pts)

1. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes définies par

$$\mathbb{P}(U=1) = \mathbb{P}(U=-1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(V=1) = \mathbb{P}(V=0) = \frac{1}{2}.$$

   (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire UV ?

   (b) Déduisez-en la covariance de U et de V, notée $\mathrm{Cov}(U,V)$.

   (c) Pouvait-on la déterminer sans faire de calculs ?

2. À présent, soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ une variable normale centrée réduite, indépendante de la variable U définie ci-dessus. On pose $Y = UX$.

   (a) En utilisant les fonctions de répartition, montrez que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

   (b) Montrez que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ (on admettra que si X et U sont indépendantes, alors X^2 et U le sont aussi).

   (c) Établissez l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}(X \leq 1; Y \leq 1) = \frac{3\,\mathbb{P}(X \leq 1) - 1}{2},$$

   et déduisez-en que X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Quelle conclusion tirez-vous de cet exercice ?

Exercice 3 (7 pts)

1. Étant donné un entier $n \geq 1$, on considère Z_n une variable aléatoire normale d'espérance $m_n = 1/n$ et de variance $\sigma_n^2 = 1 - 1/n$.

   Rappelez sa fonction caractéristique, et déduisez-en que Z_n converge en loi lorsque n tend vers l'infini vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi et les paramètres associés.

2. À présent, on considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\theta, \theta^2)$, où θ est un paramètre inconnu strictement positif. On note la moyenne empirique associée $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$.

   (a) Donnez la loi de $\bar{X}_n$ (justifiez votre réponse).

   (b) Soit $n \geq 4$. Déterminez un intervalle de confiance à 95% (ou au risque de 5%) pour le paramètre inconnu θ. Vous ferez attention à ce que les bornes de votre intervalle ne dépendent pas de θ.

   (c) Calculez l'espérance de la longueur de cet intervalle de confiance, puis déterminez la valeur minimale de n pour laquelle cette espérance est inférieure à $\theta/10$.