Contrôle final de Probabilités et Statistique

Durée 1h30

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Le barème sur 20 est approximatif.

Exercice 1 (5 points)

1. Soit $\mu > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre μ. On pose $Y = \mu X$.
   (a) Donnez la fonction de répartition de X.
   (b) Calculez la fonction de répartition de Y et donnez sa loi.
2. Pour tout $t > 0$ on note N_t la variable aléatoire représentant le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique entre l'instant 0 et l'instant t. On suppose que pour tout $t > 0$ la variable aléatoire N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt, avec $\lambda > 0$. On s'intéresse à la variable aléatoire T qui représente le temps d'attente du premier appel.
   (a) Donnez $\mathbb{P}(N_t = k)$ pour toute valeur de k possible.
   (b) Pour tout $t > 0$, exprimez l'événement $\{T > t\}$ à l'aide de la variable aléatoire N_t. Calculez ensuite $\mathbb{P}(T > t)$.
   (c) Déterminez la fonction de répartition et la densité de T. Quelle loi suit T ?
   (d) Supposons que l'on change d'échelle de temps et on pose $T' = \lambda T$. Donnez la loi de T'.

Exercice 2 (3,5 points)

1. Soit X et Y deux variables indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$.
   (a) Donnez la densité jointe $f_{X,Y}$ du couple (X, Y).
   (b) Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ le quart du disque unité. Calculez $\mathbb{P}((X, Y) \in \mathcal{D})$.
2. Soit maintenant deux suites $(X_n)_{n\geq1}$ et $(Y_n)_{n\geq1}$ de variables indépendantes, toutes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $n \geq 1$ on définit
$$Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n^2 + Y_n^2 \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (a) Donnez la loi de Z_n pour tout $n \geq 1$.
   (b) Montrez que $\frac{4(Z_1+\ldots+Z_n)}{n}$ converge en probabilité quand $n \to \infty$ et précisez la limite.
   (c) (*Bonus*) Pourriez-vous suggérer une application de ce résultat ?

Exercice 3 (4 points)

1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
   (a) Donnez $\mathbb{P}(X > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrez que la fonction de répartition de X est la suivante :
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - (1-p)^{[x]} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$
   où $[x]$ dénote la partie entière du réel x.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires. Pour tout $n \geq 1$, on suppose que X_n suit une loi géométrique de paramètre $1/n$ et on définit $Y_n = X_n/n$.
   (a) Déterminez la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n, pour tout $n \geq 1$.
   (b) Montrez que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_n$ converge en loi et précisez la loi limite.
   Indication : Vous pourriez utiliser la relation : $x - 1 < [x] \leq x$.

Exercice 4 (7,5 points)
Dans une promotion INSA de 1ère année formée de 400 étudiants, on suppose que chaque étudiant souhaite aller en pré-orientation IMACS avec probabilité p, et ce indépendamment des autres étudiants. Pour estimer p, on interroge n étudiants de la promotion sur leur choix de pré-orientation. Pour $1 \leq i \leq n$ on pose $X_i = 1$ si le $i$ème étudiant interrogé souhaite aller en IMACS et 0 sinon. On définit ensuite

$$\hat{p}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$

1. Montrez que $\hat{p}_n$ est un estimateur consistant et sans biais de p.
2. Donnez la loi approchée de $\hat{p}_n$ pour n grand. Justifiez cette approximation.
3. Déterminez un intervalle de confiance asymptotique pour p de niveau de confiance 95%. Justifiez les différentes étapes de la construction de l'intervalle de confiance.
4. On suppose que l'on a interrogé 100 étudiants de la promotion, et que 20 étudiants parmi ceux interrogés souhaitent aller en IMACS. Donnez une estimation ponctuelle de p, ainsi qu'un intervalle de confiance de niveau 95%.

   On suppose dans la suite que $p = 0.2$. On appelle N le nombre total d'étudiants de la promotion souhaitant aller en IMACS.
5. Quelle loi suit N ? Donnez ensuite son espérance et sa variance.
6. Par quelle loi, dont on précisera les paramètres, peut-on approximer la loi de N ? Justifiez.
7. La pré-orientation IMACS peut accueillir, au maximum, 72 étudiants. Donnez une valeur approchée de la probabilité que la pré-orientation IMACS soit obligée de refuser des étudiants.

Quelques données numériques : Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et F_Z sa fonction de répartition. On a les valeurs approchées suivantes :

$$F_Z(1) = 0.841,\ F_Z(1.65) = 0.95,\ F_Z(1.96) = 0.975.$$