| Correction CC2 MIC 2 / MACS 2. | /20,5. $\{1$

Exercice 1 3,5 pts.

1. $\forall x<0 \quad f_X(x)=0$

$\forall x \geq 0 \quad f_X(x) = \int_0^{+\infty} 6 e^{-2x} e^{-3y}\, dy$

$$= 6 e^{-2x} \left[\frac{e^{-3y}}{-3} \right]_0^{+\infty} = 2 e^{-2x}$$

donc $f_X(x) = 2 e^{-2x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$ donc $X \sim \mathcal{E}(2)$.

$\forall y<0 \quad f_Y(y)=0$

$\forall y \geq 0 \quad f_Y(y) = \int_0^{+\infty} 6 e^{-2x} e^{-3y}\, dy$

$$= 6 e^{-3y} \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^{+\infty} = 3 e^{-3y}$$

donc $f_Y(y) = 3 e^{-3y} \mathbb{1}_{y \geq 0}$ donc $Y \sim \mathcal{E}(3)$.

2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$

donc X et Y sont indépendantes.

3. $\mathbb{P}(X>Y) = \mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{D})$

où $\mathcal{D} = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_*^+)^2 \ ; \ x>y\}$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{x} 6 e^{-2x} e^{-3y}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} 6 e^{-2x} \left(\int_0^{x} e^{-3y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} 6 e^{-2x} \left[\frac{e^{-3y}}{-3} \right]_0^{x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} 2 e^{-2x} \left[1 - e^{-3x} \right] dx$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx - 2 \int_0^{+\infty} e^{-5x} dx$$

$$= \left[-e^{-2x} \right]_0^{+\infty} - \frac{2}{5} \left[-e^{-5x} \right]_0^{+\infty} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

EXERCICE 2 6 pts

1) Fonction de répartition

$$F_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = \begin{cases} 1 - x^{-\theta} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

puis en dérivant

$$f_X(x) = \theta\, x^{-(\theta+1)} \mathbb{1}_{x \geq 1}$$

2) $$\int_1^{+\infty} |x|^r f_X(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x^r \theta\, x^{-(\theta+1)}\,dx = \theta \int_1^{+\infty} x^{r-\theta-1}\,dx.$$

or d'après Riemann, cette intégrale cv ssi $\theta + 1 - r > 1$
$\Leftrightarrow \theta > r$.

3) Fonction de répartition des Y_i :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(Y_i \leq x) = \mathbb{P}(\ln(X_i) \leq x) = \mathbb{P}(X_i \leq e^x) = 1 - \mathbb{P}(X_i > e^x)$$

$$= \begin{cases} 1 - 1 & \text{si } e^x < 1 \\ 1 - e^{-\theta x} & \text{si } e^x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\theta x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

soit on reconnait la fct° de répartit° d'une exp $\mathcal{E}(\theta)$

soit on dérive :

$$f_{Y_i}(x) = \theta\, e^{-\theta x} \mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

4) $$\ln(U_n) = \ln\left((X_1 \cdots X_n)^{1/n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$$

0,5 LGN avec les Y_i — Y_i iid $\mathcal{E}(\theta)$ $\mathbb{E}[Y_i] = 1/\theta < +\infty$ $\mathrm{Var}(Y_i) = 1/\theta^2 < +\infty$

0,5 alors $\ln(U_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[Y_1] = 1/\theta$.

5. on considère la fonction $f(x) = \exp(x)$.

Elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc au point $1/\theta$

et $\ln(U_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1/\theta$

donc $U_n = \exp[\ln(U_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} e^{1/\theta}$.

EXERCICE 3 11 pts.

1. $\mathbb{E}[X_i] = 1 \times \mathbb{P}(X_i=1) - 1 \times \mathbb{P}(X_i=-1)$
$= 1-p-p = 1-2p$.

$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2$
$= 1\times\mathbb{P}(X_i=1) + 1\times\mathbb{P}(X_i=-1) - (1-2p)^2$
$= 1-(1-2p)^2 = \cancel{1}-\cancel{1}-4p^2+4p = 4p(1-p)$.

2. $\mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[\theta X_i + \varepsilon_i]$
$= \theta\,\mathbb{E}[X_i] + \mathbb{E}[\varepsilon_i] = \theta(1-2p)+0$.

$\mathrm{Var}(Y_i) = \mathrm{Var}(\theta X_i + \varepsilon_i)$ or $\underline{X_i \perp\!\!\!\perp \varepsilon_i}$
$= \mathrm{Var}(\theta X_i) + \mathrm{Var}(\varepsilon_i)$
$= \theta^2\,\mathrm{Var}(X_i) + \mathrm{Var}(\varepsilon_i)$
$= \theta^2\, 4p(1-p) + 1$.

3. $\mathrm{Cov}(Y_i, X_i) = \mathbb{E}[X_iY_i] - \mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[Y_i]$
$= \mathbb{E}[\theta X_i^2 + X_i\varepsilon_i] - \mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[Y_i]$
$= \theta\,\mathbb{E}[X_i^2] + \underbrace{\mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[\varepsilon_i]}_{\text{car } X_i \perp\!\!\!\perp \varepsilon_i} - \theta\,\mathbb{E}[X_i]^2 - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[\varepsilon_i]$
$= \theta\,\mathrm{Var}(X_i)$
$= \theta\, 4p(1-p)$

ou $\mathrm{Cov}(Y_i, X_i) = \mathrm{Cov}(\theta X_i, X_i) + \underbrace{\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, X_i)}_{=0 \text{ car } X_i \perp\!\!\!\perp \varepsilon_i}$
$= \theta\,\mathrm{Cov}(X_i, X_i)$
$= \theta\,\mathrm{Var}(X_i)$.

4 a) $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_iY_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\theta X_i + \varepsilon_i)$
$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \theta X_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\varepsilon_i$

or $\Omega(X_i) = \{-1, 1\}$ donc $X_i^2 = 1$
$= \theta + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\varepsilon_i$

4b. $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \mathbb{E}[\theta + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xi_i]$

$$= \theta + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i \xi_i]$$

or $\mathbb{E}[X_i \xi_i] = \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[\xi_i] = 0$ car $X_i \perp\!\!\!\perp \xi_i$ et $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$

donc $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \theta$

donc $\hat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais de θ.

4c. $Z_i = X_i \xi_i$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(Z_i \leq t) = \mathbb{P}(X_i \xi_i \leq t)$

$$= \mathbb{P}(X_i \xi_i \leq t \mid X_i = 1)\, \mathbb{P}(X_i = 1) + \mathbb{P}(X_i \xi_i \leq t \mid X_i = -1)\, \mathbb{P}(X_i = -1)$$

$$= \mathbb{P}(\xi_i \leq t)\, \mathbb{P}(X_i = 1) + \mathbb{P}(-\xi_i \leq t)\, \mathbb{P}(X_i = -1)$$

$U \sim \mathcal{N}(0,1)$. $\quad = F_U(t)(1-p) + (1 - F_U(-t))\, p$

Puis on dérive $f_{Z_i}(t) = (1-p) f_U(t) + f_U(-t) p$

or f_U est symq donc $f_U(t) = f_U(-t)$

donc $f_{Z_i}(t) = (1-p) f_U(t) + p f_U(t) = f_U(t)$.

4d. $\hat{\theta}_n = \theta + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i$

$Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1/n)$

puis $\hat{\theta}_n \sim \mathcal{N}(\theta, 1/n)$.

4e. $\hat{\theta}_n \sim \mathcal{N}(\theta, 1/n)$ donc $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \sim \mathcal{N}(0,1)$.

si $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\mathbb{P}(|U| \leq z) = 0{,}9 \iff \mathbb{P}(U \leq z) = 0{,}95$

donc $z = 1{,}65$

$\mathbb{P}(|\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)| \leq 1{,}65) = 0{,}9$

$\iff \mathbb{P}(\hat{\theta}_n - \frac{1{,}65}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \frac{1{,}65}{\sqrt{n}} + \hat{\theta}_n) = 0{,}9$

$$IC_{90\%}(\theta) = \left[\hat{\theta}_n \pm \frac{1{,}65}{\sqrt{n}}\right].$$

5. TLC sur les Y_i $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ $\mathrm{Var}(Y_i) = 1 + \theta^2$

$$\sqrt{n}\, \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{\theta^2+1}} = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) / \sqrt{n(\theta^2+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$