Correction CC1 Probabilités et Statistiques

2 IMACS , 2010 – 2011

Exercice 1

On appelle V l'événement " l'automobiliste passe par la ville "

R : " l'automobiliste a du retard ".

Les données de l'énoncé sont :

$\mathbb{P}(V) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}(R|V) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(R|V^c) = 0,2$.

1) $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R \cap V) + \mathbb{P}(R \cap V^c) = \underline{\mathbb{P}(R|V) \times \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(R|V^c)\mathbb{P}(V^c)}$

(la formule des probabilités totales)

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + 0,2 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} + 0,2 \times \frac{1}{4}$

$= 0,25 + 0,05 = \boxed{0,3}$

2) $\mathbb{P}(V|R) = \frac{\mathbb{P}(V \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(R|V) \times \mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{3}{10}} =$

$= \frac{1}{4} \times \frac{10}{3} = \boxed{\frac{5}{6}}$

Exercice 2

1) $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(\text{double au } i^{\text{ème}} \text{ lancer}) =$

$= \frac{\text{card}\{(1,1),(2,2),\dots,(6,6)\}}{\text{card}(\{1,\dots,6\} \times \{1,\dots,6\})} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

nb. cas favorables

nb. de tous le cas possibles

$\forall i \geq 1$

Donc $X_i \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{6}\right)$.

2) $T_1 \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{P}(T_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1) =$

$\overset{\text{les } X_i \text{ sont indép.}}{=} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 0)}_{1-p} \dots \underbrace{\mathbb{P}(X_{k-1} = 0)}_{1-p} \underbrace{\mathbb{P}(X_k = 1)}_{p} = p(1-p)^{k-1}$, avec $p = \frac{1}{6}$.

$\Rightarrow T_1 \sim \text{Géométrique}\left(\frac{1}{6}\right)$.

3) $\{T_1 > n\} = \{X_1 = 0, \dots, X_n = 0\} \Rightarrow \mathbb{P}(T_1 > n) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_n = 0)$

$\overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X_1 = 0) \dots \mathbb{P}(X_n = 0) = (1-p)^n$.

4) $\left.\mathbb{E}(T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_1 > n)\right|^{[2]}$, d'après l'indication.

Donc $\mathbb{E}(T_1) \underset{\text{d'après 3)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n \underset{\substack{\text{série géométrique de raison :}\\ 0<1-p<1}}{=} \frac{1}{1-(1-p)} = \boxed{\frac{1}{p}} = 6$

5) $\{T_1 = k\} \cap \{T_2 = k+l\} = \{X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_{k+l-1} = 0, X_{k+l} = 1\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\{T_1 = k\} \cap \{T_2 = k+l\}) \underset{\substack{\text{les } X_i\\ \text{sont indép.}}}{=} \mathbb{P}(X_1=0)\dots\mathbb{P}(X_{k-1}=0)\mathbb{P}(X_k=1)\mathbb{P}(X_{k+1}=0)\dots$
$\dots\mathbb{P}(X_{k+l-1}=0)\mathbb{P}(X_{k+l}=1)$

$= p^2(1-p)^{k+l-2}$.

6) $\mathbb{P}(T_2 - T_1 = l \mid T_1 = k) = \frac{\mathbb{P}(T_2 - T_1 = l, T_1 = k)}{\mathbb{P}(T_1 = k)} =$

$= \frac{\mathbb{P}(T_2 = k+l, T_1 = k)}{\mathbb{P}(T_1 = k)} = \frac{p^2(1-p)^{k+l-2}}{p(1-p)^{k-1}} = p(1-p)^{l-1}$.

7) $\mathbb{P}(T_2 - T_1 = l) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_2 - T_1 = l \mid T_1 = k)\, \mathbb{P}(T_1 = k)$

formule des probabilités totales pour la partition $\{T_1 = k\}$ $k = 1, 2, \dots$

$= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{l-1} \cdot p(1-p)^{k-1} = p(1-p)^{l-1} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}}_{=1}$

$= p(1-p)^{l-1}$, $\forall\, l \in \mathbb{N}^*$

On obtient que $T_2 - T_1$ suit la même loi Géométrique (p) comme T_1.

8) $\mathbb{P}(T_1 = k, T_2 - T_1 = l) = \mathbb{P}(T_1 = k, T_2 = k+l) = p^2(1-p)^{k+l-2}$ (voir la question 5))

$\mathbb{P}(T_1 = k)\,\mathbb{P}(T_2 - T_1 = l) = p(1-p)^{k-1} \cdot p(1-p)^{l-1} = p^2(1-p)^{k+l-2}$

On obtient $\mathbb{P}(T_1 = k, T_2 - T_1 = l) = \mathbb{P}(T_1 = k)\,\mathbb{P}(T_2 - T_1 = l)$, $\forall\, k, l \in \mathbb{N}^*$.
donc ces deux événements sont indép., $\forall\, k, l \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow T_1$ et $T_2 - T_1$ sont indépendants

Une autre méthode : $\mathbb{P}(T_2 - T_1 = l \mid T_1 = k) = \mathbb{P}(T_2 - T_1 = l) \Rightarrow$ indépendance.

9) BONUS : $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) =$

on change l'ordre de sommation

$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathbb{P}(X = k)$

$= \sum_{k=0}^{\infty} k\, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X)$.