Probabilité et Statistiques **2010-2011**
PO MIC/IMACS 2ème année

Contrôle du 8 juin 2010
Durée : 1 heure 30

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Le barème indiqué ci-dessous est approximatif.

Données nécessaires pour l'ensemble du contrôle

Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

$$\mathbb{P}(X < 1,96) = 0,975;\ \mathbb{P}(X < 1,65) = 0,95; \mathbb{P}(X < 1,44) = 0,925;\ \mathbb{P}(X < 1,28) = 0,9.$$

Exercice 1 (3 pts)

Deux transistors sont montés sur le même circuit imprimé. Leurs durées de vie sont un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la densité est donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-2x}e^{-3y} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminez les lois marginales de X et Y.
2. X et Y sont-elles indépendantes?
3. Calculez P(X > Y).
   Indication: exprimez $\mathbb{P}(X > Y)$ *comme* $\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{D})$ *avec* $\mathcal{D}$ *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^2$ *bien choisi.*

Exercice 2 (6 pts)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[1, +\infty[$ telle que

$$\mathbb{P}(X > x) = \begin{cases} x^{-\theta} & \text{si } x \geq 1 \\ 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

avec $\theta > 0$ un paramètre réel fixé.

1. Déterminez la densité de probabilité de X.
2. On rappelle que X admet un moment d'ordre $r > 0$ si $\mathbb{E}[|X|^r]$ existe.
   Pour quelles valeurs de $r > 0$, la variable X admet-elle un moment d'ordre r? On discutera selon les valeurs du paramètre θ.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X et soit $Y_n = \ln(X_n)$ pour tout $n \geq 1$. Montrez que les variables aléatoires Y_i suivent une loi exponentielle de paramètre θ.
4. Soit $U_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n}$. Montrez que la suite $(\ln U_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{\theta}$.
5. Déduisez-en que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ converge aussi en probabilité et déterminez la limite.
   Indication: Vous pouvez utiliser le résultat général suivant:
   Si une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en probabilité vers* $c \in \mathbb{R}$ *et* f *est une fonction réelle continue au point* c*, alors la suite* $(f(X_n))_{n\geq 1}$ *converge en probabilité vers* $f(c)$*.*

Exercice 3 (11 pts)
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et de même loi définie par

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - p \text{ et } \mathbb{P}(X_i = -1) = p$$

où $p \in]0, 1[$ est un paramètre.
On considère également $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et indépendantes des X_i. Posons

$$Y_i = \theta X_i + \xi_i, \; i = 1, \ldots, n$$

où θ est un paramètre inconnu.

1. Déterminez l'espérance et la variance des X_i.
2. Déterminez l'espérance et la variance des Y_i.
3. Déterminez la covariance entre Y_i et X_i.
4. On se propose dans cette partie d'étudier $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$, un estimateur de θ.

   4a. Montrez que $\hat{\theta}_n = \theta + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xi_i$.

   4b. Montrez que $\hat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais de θ.

   4c. Soit $Z_i = X_i \xi_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Exprimez la fonction de répartition de Z_i en fonction de celle d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déduisez-en que les Z_i suivent une loi normale centrée réduite.

   4d. Déduisez-en la loi de $\hat{\theta}_n$.

   4e. Construisez un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance $0,9$.

5. On suppose pour cette question que $p = \frac{1}{2}$.
   Montrez que $\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \right) \Big/ \sqrt{n(1 + \theta^2)}$ converge en loi vers une loi que l'on précisera.