

Examen partiel de Probabilités et Statistique

Durée 1h.

Tous les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Le barème sur 20 est approximatif.

Exercice 1 (5 points)

Pour se rendre à son domicile, un automobiliste passe par la ville 3 fois sur 4. Dans ce cas, il est pris dans un embouteillage 1 fois sur 3. Quand il contourne la ville, il est retardé par un contrôle de police avec la probabilité 0,2.

1. Calculez la probabilité que l'automobiliste soit retardé.
2. Sachant qu'il est en retard, quelle est la probabilité qu'il soit passé par la ville ?

Exercice 2 (15 points)

On lance plusieurs fois deux dés à six faces de manière simultanée. On appelle T_1 le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un double, i.e. un même résultat avec les deux dés.

Soit T_2 le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un deuxième double.

On introduit aussi les variables aléatoires $X_i, i \geq 1$ définies par: $X_i = 1$, si l'on obtient un double au i -ème lancer, et 0, sinon.

1. Pour chaque entier $i \geq 1$, calculez $\mathbb{P}(X_i = 1)$ et donner la loi de X_i .
2. Donnez les valeurs que la variable aléatoire T_1 peut prendre puis déterminez la loi de T_1 .
3. Pour un nombre $n \in \mathbb{N}$ quelconque, exprimez l'événement $\{T_1 > n\}$ en fonction des variables aléatoires X_i . Montrez que $\mathbb{P}(T_1 > n) = (1 - p)^n$, avec $p = \mathbb{P}(X_i = 1)$.
4. Calculez $E[T_1]$, le nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir un double.

Indication: Vous pourriez admettre et utiliser le résultat suivant:

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

5. Pour deux entiers $k, \ell \geq 1$, exprimez l'événement $\{T_1 = k\} \cap \{T_2 = k + \ell\}$ en utilisant les variables aléatoires X_i , puis calculez $\mathbb{P}(\{T_1 = k\} \cap \{T_2 = k + \ell\})$.
6. Calculez $\mathbb{P}(T_2 - T_1 = \ell \mid T_1 = k)$ pour $k, \ell \geq 1$.
7. Calculez $\mathbb{P}(T_2 - T_1 = \ell)$ pour tout entier $\ell \geq 1$ et en déduisez que $T_2 - T_1$ suit la même loi que T_1 .
8. Montrez que les événements $\{T_1 = k\}$ et $\{T_2 - T_1 = \ell\}$ sont indépendantes, pour tout $k, \ell \geq 1$.

Que peut-on dire concernant l'indépendance des variables aléatoires T_1 et $T_2 - T_1$?

Question bonus: Démontrez le résultat énoncé dans l'indication donnée à la question 4.