Probabilités et statistique **2009-2010**
PO IMACS

Contrôle du 28 Mai 2010
Durée : 1 Heure
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Question de cours :

1. Rappeler la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.
2. Montrer que la fonction de répartition est croissante.
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Exprimer $P(X = x_0)$ en fonction de la fonction de répartition F_X de X. Que se passe-t-il si F_X est continue ?
4. Rappeler la définition de la densité d'une variable aléatoire X.

Exercice 1 :
1/4 de la population a été vaccinée. Le vaccin n'étant pas totalement efficace, parmi les vaccinés, on compte 1/12 de malades. Parmi les malades, il y a 4 non-vaccinés pour un vacciné.
On note V l'événement "La personne est vaccinée", et M l'événement "La personne tombe malade". on note $\bar{V}$ et $\bar{M}$ les événements complémentaires.

1. Traduire les hypothèses de l'énoncé.
2. Montrer que
$$P(M) = \frac{P(M/V)P(V)}{1 - P(\bar{V}/M)}.$$
3. En déduire que la probabilité pour un non vacciné de tomber malade vaut 1/9.

Exercice 2 :
Soient p et q deux nombres de $]0,1[$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y telles que X suit une loi géométrique de paramètre p et Y suit une loi géométrique de paramètre q. On rappelle :
$$\forall k \geq 1, P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

1. Déterminer $P(X > j)$ pour tout $j \geq 0$.
2. Calculer $P(X > j \cap Y = j)$ pour tout $j \geq 1$.
3. En déduire $P(X > Y)$.
4. Calculer $P(X = j \cap Y = j)$ pour tout $j \geq 1$. En déduire $P(X = Y)$.
5. Déterminer sans calcul $P(Y > X)$.
6. Si $p = q = \frac{1}{2}$, calculer $P(X > Y)$, $P(X = Y)$ et $P(Y > X)$.