Probabilités et statistique **2008-2009**

PO IMACS - 2ième année

Contrôle du 27 Mai 2009
Durée : 30 minutes (?)

Exercice 1. On a décelé dans un élevage de moutons une probabilité 0.3 pour qu'un animal soit atteint par une maladie M. On dispose d'un test T pour détecter la maladie. La probabilité qu'un mouton non atteint ait une réaction négative au test est 0.9. La probabilité qu'un mouton atteint ait une réaction positive est 0.8.

Quelle est la probabilité qu'un mouton soit atteint par la maladie M sachant qu'il a une réaction positive au test ?

Exercice 2. On dispose de n boules ($n > 0$). On met chacune d'entres elles, indépendemment des autres dans la boîte A avec la probabilité p, et dans la boîte B avec probabilité $1-p$. On désigne par X (respectivement Y) le nombre de boules que l'on a ainsi placées dans A (respectivement dans B).

1. Quelle est la loi de la variable X ? Même question pour Y ?
2. Montrer que les événements $\{X = 0\}$ et $\{Y = 0\}$ ne sont pas indépendants. Que peut-on en déduire concernant l'indépendance de X et Y ?

On dispose maintenant d'un nombre aléatoire Z de boules, où Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On reprend les mêmes opérations que ci-dessus avec les Z boules, les tirages étant bien entendu supposés indépendants de la valeur de Z.

3. Montrer que dans cette situation X (resp. Y) suit une loi de Poisson de paramètre λp (resp. $(1-\lambda)p$).

4. Soient $i, j \in \mathbb{N}$ fixés. Montrer que

$$P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = P(X = i).P(Y = j).$$

5. En déduire que X et Y sont cette fois-ci indépendantes.